

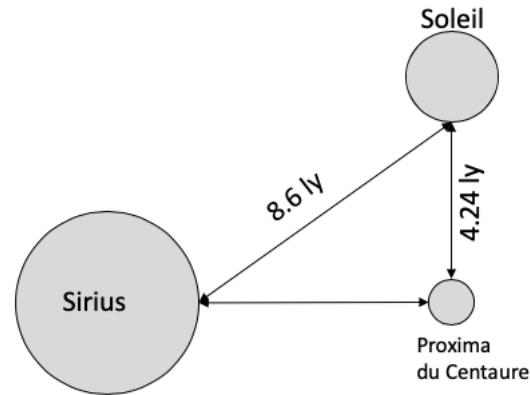
## Test de mi-semestre

### Exercice 1

25 points

Le système solaire le plus proche du nôtre est *Proxima*, à 4.24 années-lumières soit  $4 \times 10^{13}$  km. En 2016, il a même été découvert une planète dans la zone habitable de cette étoile. La première mission interstellaire à bord du vaisseau SSV2019 se prépare donc. Cependant, les ingénieurs sont formels : dans ce type de vaisseau ( $m_v=1000$  tonnes), on peut seulement stocker des ressources en eau et oxygène pour au maximum 3 ans. Les stocks pourront être rétablis à *Proxima*.

- a) **5 points** En négligeant les effets d'accélération, à quelle vitesse devra voyager ce vaisseau pour accomplir ce voyage dans les 3 ans ? Est-ce possible ?
- b) **5 points** Le moteur du SSV2019 utilise la réaction nucléaire qui annihile  $\bar{H}$  avec  $H$ . De quelle masse de  $\bar{H}$  aura-t-on besoin pour atteindre la vitesse nécessaire ?
- c) **5 points** A quelle vitesse les extra-terrestres voyagent-ils, vu par le vaisseau SSV2019 ?
- d) **5 points** Toujours depuis le référentiel du vaisseau SSV2019, quelle durée se sera écoulée entre l'envoi du message et l'arrivée des extra-terrestres sur *Proxima* ?
- e) **5 points** Une fois à *Proxima*, l'équipage envoie un message radio à la Terre concernant ce premier contact. À la réception de ce message sur Terre, combien de temps se sera-t-il écoulé depuis le départ du vaisseau SSV2019 ?



Corrigé

Indication : Notez que

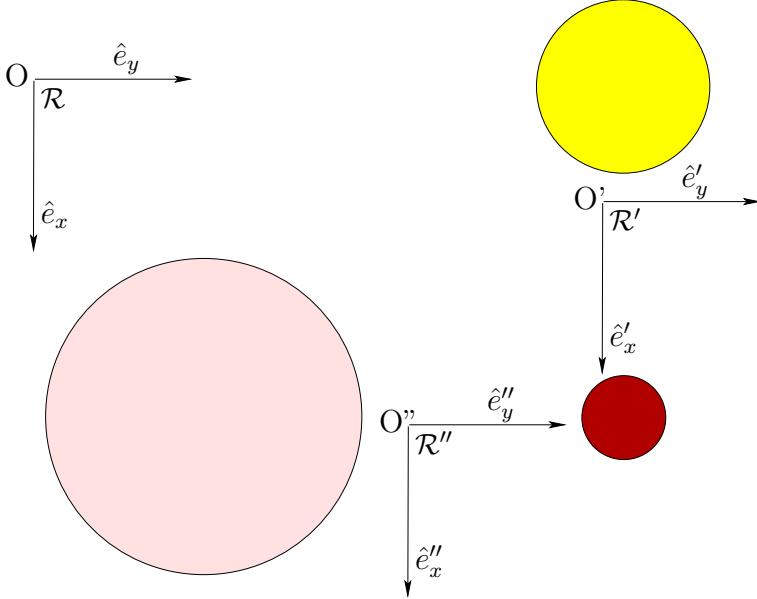
$$1 \text{ a.l.} = 1 \text{ an} \times c \quad (1)$$

$$= \underbrace{(365 \times 24 \times 3600)}_{1[\text{an}]} [\text{s}] \times 3 \times 10^8 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (2)$$

Ceci permet (mais pas nécessaire) de simplifier les applications numériques afin de rester dans les unités de [a.l.] (années-lumières) pour les distances et [an] (années) pour les durées.

- a) Une première façon d'avoir quelques points en relativité est de faire un beau dessin et de définir les référentiels. Commençons par définir les référentiels utiles et les coordonnées associées :

- $\mathcal{R}$  est le référentiel lié aux systèmes solaires (approximés comme stationnaires)
  - $\mathcal{R}'$  est le référentiel lié au vaisseau SSV2019.
  - $\mathcal{R}''$  est le référentiel lié au vaisseau des extra-terrestres.
- Le choix des coordonnées est indiqué sur la figure.



Remarque : Les distances données dans l'énoncé sont mesurées dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Rappel :  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Pour trouver la vitesse à laquelle doit voyager SSV2019, on utilise la relation de dilatation du temps :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{D}{\gamma v} \Rightarrow v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{D}{\Delta t'} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta t' c}{D}\right)^2 + 1}}, \quad (3)$$

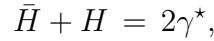
où  $D=4.24$  a.l. est la distance Soleil-*Proxima*, mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et  $\Delta t' = 3$  ans est la durée maximale du voyage, mesurée dans  $\mathcal{R}'$ .

Application numérique :

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{4.2}\right)^2 + 1}} \simeq 0.81 \Rightarrow \gamma = 1.73.$$

Le vaisseau SSV2019 doit voyager à  $v = 0.81c$ .

b) La réaction d'annihilation de l'anti-hydrogène  $\bar{H}$  par l'hydrogène  $H$



libère une énergie totale  $E = (m_{\bar{H}} + m_H)c^2$ , sous forme de 2 photons  $\gamma^*$ .

On suppose que toute l'énergie issue des réactions nucléaires est convertie en énergie cinétique  $E_{c,v}$  du vaisseau de masse  $m_v$ .

$$E = E_{c,v} \Rightarrow (m_{\bar{H}} + m_H)c^2 = (\gamma - 1)m_v c^2.$$

Or  $m_{\bar{H}} = m_H$ , on trouve donc :

$$m_{\bar{H}} = \frac{(\gamma - 1)m_v}{2} = 365 \times 10^3 \text{ kg} \quad (4)$$

- c) On sait que dans le référentiel  $\mathcal{R}''$ , la durée du voyage des extra-terrestres sera de  $\Delta t_e'' = 5$  ans. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on peut calculer la distance Sirius-Proxima  $D_e$  par le théorème de Pythagore :

$$D_e = \sqrt{8.2^2 - 4.24^2} \simeq 7.5 \text{ a.l.}$$

Tout comme au a), on calcule la vitesse relative  $v_e$  des extra-terrestres dans  $\mathcal{R}''$  par rapport à  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{v_e}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta t_e'' c}{D_e}\right)^2 + 1}} \simeq 0.83.$$

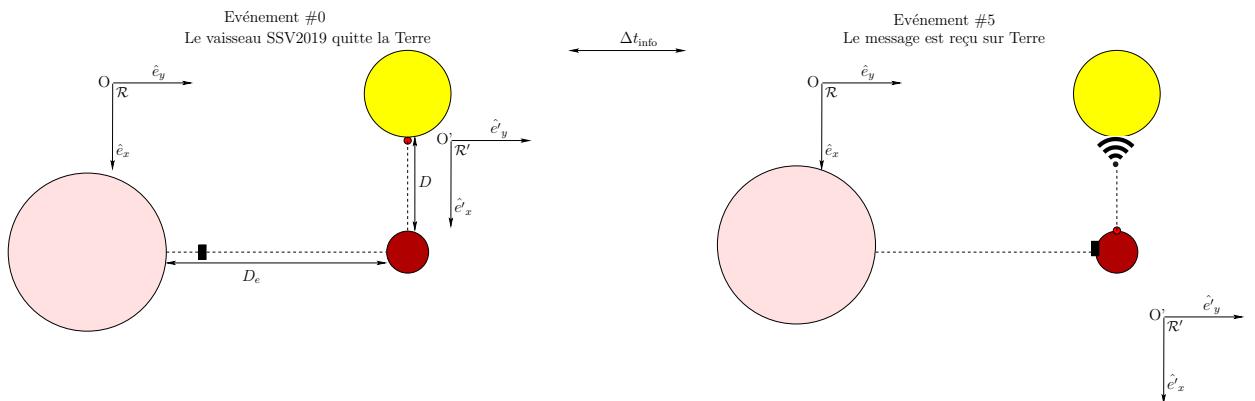
Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , la vitesse du vaisseau extra-terrestre se décompose comme suit :  $\vec{v}_e = v_{e,x} \hat{e}_x + v_{e,y} \hat{e}_y$  avec  $v_{e,x} = 0$  et  $v_{e,y} = v_e$ , tandis que dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on a  $\vec{v}'_e = v'_{e,x} \hat{e}'_x + v'_{e,y} \hat{e}'_y$ . Les composantes  $v'_{e,x}$  et  $v'_{e,y}$ , mesurées dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , sont données par les transformations de Lorentz pour les vitesses avec  $\mathcal{R}$  qui s'éloigne de  $\mathcal{R}'$  à la vitesse  $-v$  :

$$v'_{e,x} = \frac{v_{e,x} - v}{1 - \frac{v_{e,x} v}{c^2}} = -v = -0.81c; \quad (5)$$

$$v'_{e,y} = \frac{v_{e,y}}{\gamma \left(1 - \frac{v_{e,x} v}{c^2}\right)} = \frac{v_e}{\gamma} = \frac{0.83c}{1.73} \simeq 0.48c. \quad (6)$$

- d) Pour trouver le temps écoulé  $\Delta t'_{e,mi-chemin}$ , mesuré dans  $\mathcal{R}'$ , entre le moment où les extra-terrestres envoient le message au SSV2019 et leur arrivée vers *Proxima*, il faut connaître, dans  $\mathcal{R}'$ , la distance restante à parcourir ainsi que la vitesse du vaisseau extra-terrestre. Dans  $\mathcal{R}$ , il leur reste à parcourir la distance  $D_e/2$  mais c'est la même distance dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  puisque seules les distances dans le sens de propagation sont sujettes aux effets relativistes. De plus, de la question c), on a  $v'_{e,y}$ . Le temps  $\Delta t'_{e,mi-chemin}$  est donné par :

$$\Delta t'_{e,mi-chemin} = \frac{D_e/2}{v'_{e,y}} = \frac{7.5/2}{0.48c} \simeq 7.8 \text{ ans.}$$



- e) Dans quel référentiel doit être calculé le temps demandé ? Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  puisque c'est sur Terre que l'on veut savoir combien de temps s'est écoulé entre le départ de SSV2019 et la réception de son message envoyé depuis *Proxima*. Cette durée, qu'on note  $\Delta t_{info}$ , peut être décomposée en : temps écoulé entre le départ de SSV2019 et l'envoi du message depuis *Proxima*, noté  $\Delta t_{SSV2019,envoi}$  + temps de propagation du message entre *Proxima* et la Terre, qu'on appelle  $\Delta t_{SSV2019,mes..}$ . Ce dernier, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , est simplement donné par

$\Delta t_{\text{SSV2019,mes.}} = \frac{D}{c} = 4.24$  ans puisque les ondes se propagent à la vitesse de la lumière. Soit

$$\Delta t_{\text{info}} = \Delta t_{\text{SSV2019,envoi}} + \Delta t_{\text{SSV2019,mes.}} = \Delta t_{\text{SSV2019,envoi}} + 4.24.$$

Comment calculer  $\Delta t_{\text{SSV2019,envoi}}$  ?

On va d'abord calculer ce temps dans le référentiel lié à SSV2019  $\mathcal{R}'$  puis appliquer une transformation de Lorentz complète pour revenir dans  $\mathcal{R}$ .

Dans  $\mathcal{R}'$ ,  $\Delta t'_{\text{SSV2019,envoi}}$  se décompose en : temps de voyage du SSV2019 entre la Terre et *Proxima* + éventuellement, temps d'attente du vaisseau extra-terrestre une fois arrivé vers *Proxima*. Soit

$$\Delta t'_{\text{SSV2019,envoi}} = \Delta t' + \Delta t'_{\text{attente}} = 3 + \Delta t'_{\text{attente}},$$

puisque  $\Delta t'$  est une donnée du problème, utilisé à la question a). Toute la difficulté de l'exercice consiste donc à estimer  $\Delta t'_{\text{attente}}$  et la figure ci-après doit nous y aider. Au moment de la réception du message des extra-terrestres, SSV2019 voyage depuis 1.5 ans. Le temps d'attente est donné par la durée du voyage du vaisseau des extra-terrestres depuis le moment où ils envoient leur message  $\Delta t'_{e,mi-chemin}$  (question d)) auquel on enlève le temps de propagation  $\Delta t'_{e,mes.}$  du message des extra-terrestres et aussi la durée de la deuxième moitié du voyage de SSV2019. Comme il s'agit d'onde radio, le message est transporté à la vitesse  $c$ . On cherche donc la distance  $D'_{\text{mes.}}$  entre le point d'émission et le point de réception du message, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Cette distance est donnée par Pythagore :

$$D'_{\text{mes.}} = \sqrt{\left(\frac{D'}{2}\right)^2 + \left(\frac{D'_e}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{D}{2\gamma}\right)^2 + \left(\frac{D_e}{2}\right)^2} \simeq 3.94 \text{ a.l.},$$

où l'on a utilisé la contraction des longueurs dans la deuxième équation ainsi que le fait que les distances dans la direction  $y$  ne sont pas contractées pour un objet se déplaçant dans la direction  $x$ .

On obtient donc

$$\Delta t'_{e,mes.} = \frac{D'_{\text{mes.}}}{c} = 3.94 \text{ ans} \quad \Rightarrow \quad \Delta t'_{\text{attente}} = \Delta t'_{e,mi-ch.} - \Delta t'_{e,mes.} - \Delta t'_{\text{SSV2109,mi-ch.}}$$

soit  $\Delta t'_{\text{attente}} = 7.8 - 3.94 - 1.5 = 2.36$  ans.

On obtient donc :

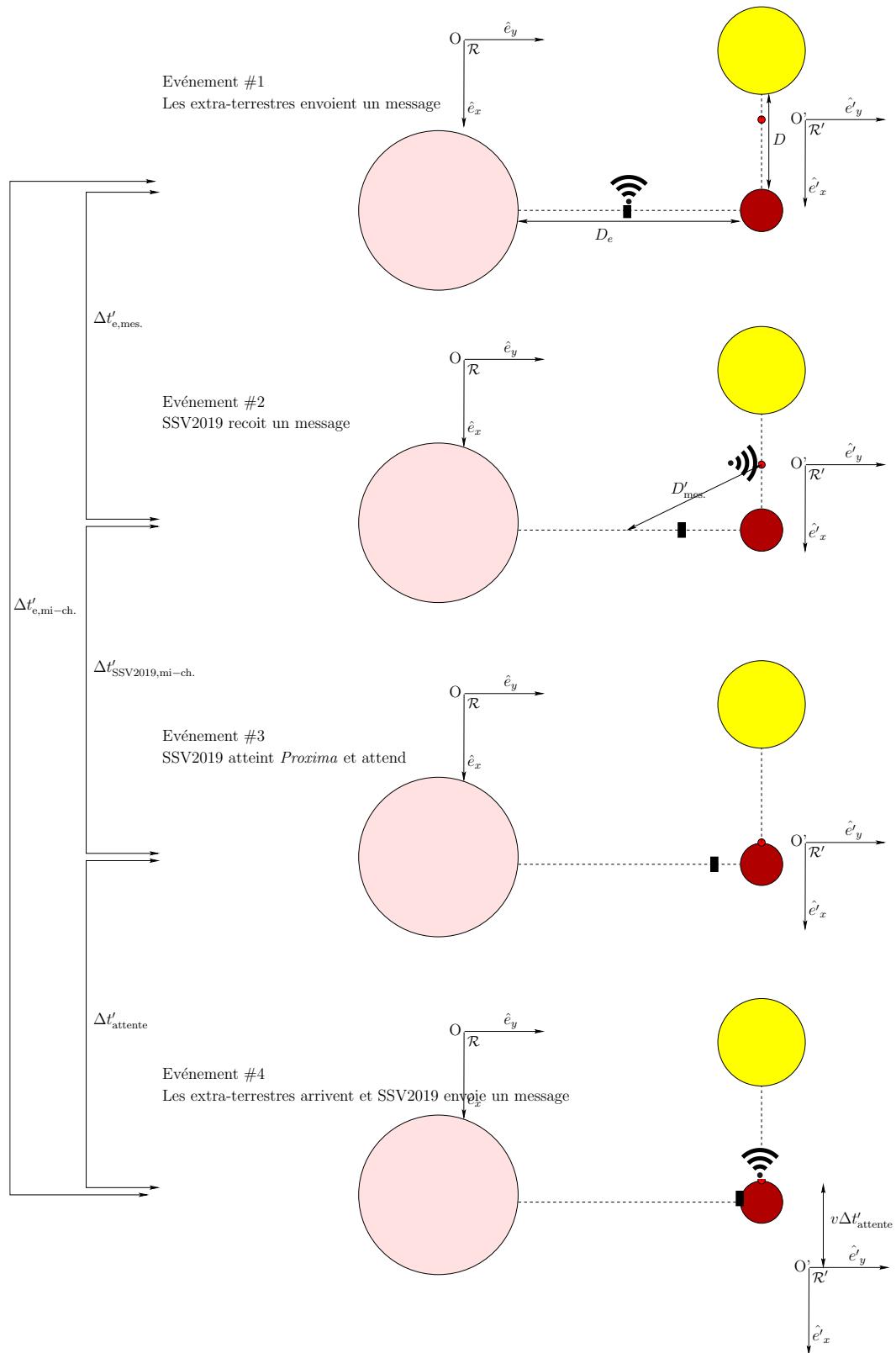
$$\boxed{\Delta t'_{\text{SSV2019,envoi}} = \Delta t' + \Delta t'_{\text{attente}} = 3 + 2.36 = 5.36 \text{ ans}} \quad (7)$$

On peut donc appliquer maintenant la transformation de Lorentz pour revenir dans  $\mathcal{R}$ . On garde en tête que  $\mathcal{R}$  s'éloigne toujours de  $\mathcal{R}'$  à la vitesse  $v$  même lorsque SSV2019 est à l'arrêt vers *Proxima* (voir dernier schéma figure ci-après). On a donc :

$$\boxed{\Delta t_{\text{SSV2019,envoi}} = \gamma \left( \Delta t'_{\text{SSV2019,envoi}} - \frac{v^2}{c^2} \Delta t'_{\text{attente}} \right) = 1.73 \times (5.36 - 0.81 \times 0.81 \times 2.36) \simeq 6.6 \text{ ans}} \quad (8)$$

et finalement on obtient :

$$\boxed{\Delta t_{\text{info}} = \Delta t_{\text{SSV2019,envoi}} + \Delta t_{\text{SSV2019,mes.}} = 6.6 + 4.24 = 10.84 \text{ ans.}} \quad (9)$$



## Exercice 2

**25 points**

Au pied d'un immeuble de 50 étages (2.5m/étage) se trouve une piscine de surface (10 m × 1.5 m) et de profondeur 3 m remplie d'eau liquide à 0°C sur une hauteur de 2 m sauf les 2 premiers centimètres qui forment une couche de glace également à 0°C. On veut faire fondre la glace et augmenter la température de l'eau. Pour cela vous disposez d'un bloc d'aluminium de masse 5000 kg et dont la température est égale à 650°C.

- a) **8 points** Vous lâchez le bloc d'aluminium du toit de l'immeuble. Quelle sera la température finale  $T_{\text{finale}}$  de l'eau une fois l'équilibre thermique atteint ?
- b) **6 points** En considérant que la loi de Dulong-Petit s'applique au bloc d'aluminium, comment changerait la température finale ? Justifiez qualitativement votre réponse.
- c) **11 points** On se place dans la situation à la fin de la question a). Un locataire souhaite une température d'eau à 25°C. Pour y arriver, il envisage de jeter dans la piscine, depuis une hauteur  $h$ , 100 kg d'aluminium sous forme liquide à la température de fusion de l'aluminium  $T_{f,\text{alu}}$ . A l'équilibre thermique, le locataire veut que tout l'aluminium soit à l'état solide et l'eau à l'état liquide. Calculez  $h$ . Commentez votre résultat.

Indications : On néglige les échanges de chaleur avec l'environnement. On fait l'approximation que les propriétés thermiques de l'eau et de l'aluminium ne changent pas avec la température. Supposez que toute l'énergie cinétique du bloc est donnée au système glace-eau et n'est pas utilisée pour rompre la couche de glace. Masse volumique de l'eau  $\rho_{\text{eau}} \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3}$ . Masse volumique de la glace  $\rho_{\text{glace}} = 917 \text{ kg m}^{-3}$ . Chaleur latente de fusion de la glace à 0°C :  $L_f = 333.6 \text{ kJ kg}^{-1}$ . Chaleur spécifique à volume constant de l'eau liquide :  $c_{\text{eau}} \simeq 4186 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Chaleur spécifique à volume constant de la glace à 0°C :  $c_{\text{glace}} \simeq 2110 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Chaleur latente de fusion de l'aluminium :  $L_{f,\text{alu.}} = 335 \text{ kJ kg}^{-1}$ . Chaleur spécifique à volume constant de l'aluminium :  $c_{\text{alu.}} \simeq 900 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Température de fusion de l'aluminium :  $T_{f,\text{alu.}} = 660^\circ\text{C}$ . Masse molaire de l'aluminium : 27 g/mol. Constante des gaz parfaits :  $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

---

### Corrigé

---

a)

$$Q_{\text{alu}} + Q_{\text{eau-gla}} = 0$$

$$\underbrace{-m_{\text{alu}}g|h| + m_{\text{alu}}c_{\text{alu}}(T_{\text{finale}} - T_{\text{init,alu}})}_{\text{Chaleur perdue par l'aluminium } (<0)} + \underbrace{V_{\text{glace}}\rho_{\text{glace}}L_f + m_{\text{eau}}c_{\text{eau}}(T_{\text{finale}} - T_{\text{init,eau}})}_{\text{Chaleur gagnée par eau+glace } (>0)} = 0,$$

où  $V_{\text{glace}}$  est le volume occupé par la glace et  $m_{\text{eau}} = V\rho_{\text{eau}}$  la masse totale de l'eau une fois que toute la glace a fondu.

On peut isoler  $T_{\text{finale}}$  :

$$T_{\text{finale}} = \frac{m_{\text{alu}}gh - V_{\text{glace}}\rho_{\text{glace}}L_f + m_{\text{alu}}c_{\text{alu}}T_{\text{init,alu}}}{m_{\text{alu}}c_{\text{alu}} + V\rho_{\text{eau}}c_{\text{eau}}} . \quad (10)$$

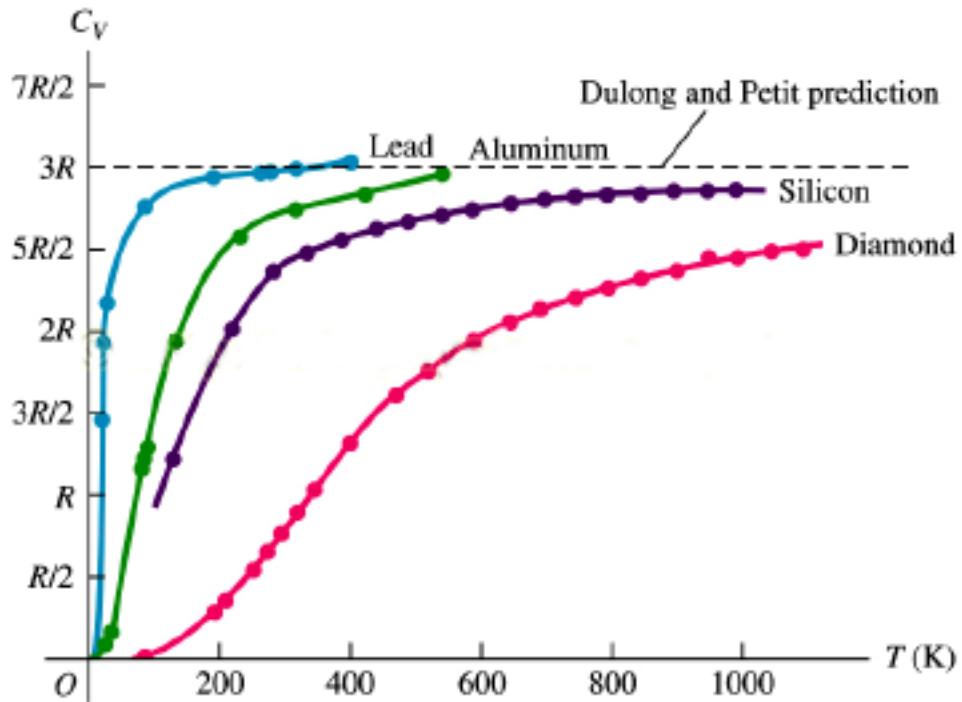
Application numérique :

La masse de l'eau liquide vaut  $m_{\text{eau}} = V\rho_{\text{eau}} = (10 \times 1.5 \times 2) \times 1000 = 3 \times 10^4 \text{ kg}$ .

$$T_{\text{finale}} = \frac{5000 \times 9.81 \times 50 \times 2.5 - 10 \times 1.5 \times 0.02 \times 917 \times 333.6 \times 10^3 + 5000 \times 900 \times 650}{5000 \times 900 + 3 \times 10^4 \times 4186}$$

$$\simeq 22^\circ\text{C.}$$

- b) La loi de Dulong-Petit stipule qu'à haute température, la capacité thermique molaire  $C_V$  de tout solide tend vers la valeur  $C_V = 3R$  où  $R$  est la constante des gaz parfaits.



Cette loi peut se comprendre en utilisant l'approche microscopique. Dans un solide, les atomes sont arrangés en un réseau cristallin. L'énergie emmagasinée dans un réseau cristallin correspond à l'énergie d'agitation des atomes du réseau autour de leur position d'équilibre. Chaque atome qui vibre a 6 degrés de liberté (3 de translation, 3 de rotation). Pour chaque atome, à chaque degré de liberté correspond  $k_B T/2$  joules. Pour une mole de solide avec une masse molaire  $M$ , on a donc une chaleur  $Q = 3N_A k_B T$  avec nombre  $N_A$  le nombre d'Avogadro. Or  $R = N_A k_B$ , donc  $Q = 3RT$  et ainsi  $c_V = 3R/M$ .

Application numérique :

$$c_V = \frac{3 \times 8.314}{27 \times 10^{-3}} = 923 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Etant donnée que  $c_V$  augmente légèrement, la température finale sera un peu plus élevée.

- c) Pour avoir de l'eau liquide et l'aluminium solide à l'équilibre thermique, tout l'aluminium versé, doit se solidifier, donc l'énergie mise à disposition par l'aluminium liquide est :

$$E_{\text{alu}} = m'_{\text{alu}} (gh + L_{\text{f,alu}} - c_{\text{alu}} (T_{\text{finale},2} - T_{\text{f,alu}})) ,$$

où  $m'_{\text{alu}}$  est la masse d'aluminium versée. L'énergie dont a besoin la piscine (eau et bloc d'aluminium solide) pour augmenter sa température jusqu'à  $T_{\text{finale},2} = 25^\circ\text{C}$  s'écrit :

$$E_{\text{piscine}} = (m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} + m_{\text{alu}} c_{\text{alu}}) (T_{\text{finale},2} - T_{\text{finale}}) ,$$

où  $T_{\text{finale}}$  est la température finale de la question a).

Par la conservation de l'énergie  $E_{\text{alu}} = E_{\text{piscine}}$  :

$$h = \frac{1}{g} \left( \frac{(m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} + m_{\text{alu}} c_{\text{alu}})}{m'_{\text{alu}}} (T_{\text{finale},2} - T_{\text{init,piscine}}) + c_{\text{alu}} (T_{\text{finale},2} - T_{\text{f,alu}}) - L_{\text{f,alu}} \right) . \quad (11)$$

### Application numérique :

$$h = \frac{1}{9.81} \left( \frac{(3 \times 10^4 \times 4186 + 5000 \times 900)}{100} (25 - 22) + 900 (25 - 660) - 335 \times 10^3 \right)$$
$$\simeq 3 \times 10^5 \text{ m!!!}$$

Cette valeur est évidemment irréalisable. Ceci démontre qu'il n'est pas efficace de réchauffer de l'eau en utilisant un métal fondu. Tout ceci étant dû au fait que l'eau est un très grand réservoir de chaleur, en effet sa capacité thermique est très élevée par rapport à l'aluminium. En général c'est l'eau qui est utilisée pour refroidir les métaux fondus.

## Exercice 3

25 points

La pression atmosphérique  $p(z)$  varie avec l'altitude  $z$  selon la relation

$$p(z) \simeq p_0 (1 - Cz)^5,$$

où  $p_0 = 101325$  Pa est la pression au niveau de la mer,  $z$  est l'altitude en mètres, et  $C = 2.25577 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ . Ceci va vous être utile pour votre expédition jusqu'au sommet de l'Everest ( $z_E = 8848$  m,  $T_E = -28^\circ\text{C}$ ) ! Vous partez depuis le niveau de la mer ( $z = 0$ ) avec une bouteille d'oxygène à la pression  $p_{B,0} = 200$  bar et la température  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Vous utiliserez cette bouteille seulement lorsque le sommet sera atteint. On suppose que la bouteille et l'oxygène sont toujours en équilibre thermique.

- 4 points Quelle est la pression de l'oxygène à l'intérieur de la bouteille au sommet de l'Everest ( $z = z_E$ ), une fois que l'équilibre thermique entre la bouteille avec l'oxygène et l'extérieur est atteint ?
- 7 points On suppose maintenant que vous êtes arrivés au sommet de l'Everest. En sachant que votre corps peut supporter des températures aussi extrêmes pendant au maximum 10 minutes ( $\Delta t_{max} = 10$  min), et que, durant une respiration, il a besoin de 2 litres d'oxygène au rythme de 12 respirations par minute, quel doit-être le volume minimal de la bouteille,  $V_B$ , afin de vous assurer un temps maximum au sommet ?
- 7 points Calculer la chaleur échangée  $\Delta Q$  entre la bouteille avec l'oxygène et l'extérieur lors de votre ascension vers le sommet de l'Everest. On supposera que la bouteille a une volume constant  $V_B$ , négligeant ainsi la dilatation de la bouteille due au changement de température.
- 7 points On suppose une bouteille cylindrique de hauteur  $L=1$  m. Calculez le temps moyen que met une molécule pour traverser la bouteille dans sa longueur au niveau de la mer puis au sommet de l'Everest.

Indication : L'oxygène est un gaz idéal diatomique avec degrés de liberté translationnel et rotationnel. Constante de Boltzmann  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ . Masse molaire de l'oxygène  $M = 16 \text{ g mol}^{-1}$ .

---

### Corrigé

---

- Afin de déterminer la pression de l'oxygène à l'intérieur de la bouteille au sommet de l'Everest ( $z = z_E$ ), on utilise la relation des gaz parfaits. Comme la bouteille est un système fermé, c'est-à-dire que la quantité de moles de gaz est conservée durant l'ascension, on a que

$$\frac{p}{T} = nR,$$

avec  $n = N/V$  la concentration molaire de gaz dans la bouteille. En évaluant l'équation précédente en  $z = 0$  et  $z = z_E$ , on obtient que

$$\frac{p_{B,0}}{T_0} = \frac{p_E}{T_E} \Rightarrow p_E = \frac{T_E}{T_0} p_{B,0}. \quad (12)$$

Par application numérique, on trouve

$$p_E = \frac{245.15 \text{ K}}{293.15 \text{ K}} \times 200 \text{ bar} = 167.25 \text{ bar}.$$

- On veut déterminer le volume de la bouteille,  $V_B$ , nécessaire pour rester un temps maximal de  $\Delta t_{max} = 10$  min au sommet de l'Everest. Pour cela, on suppose que notre corps respire

au rythme de 12 respirations de 2 L d'oxygène à pression ambiante par minute. Le volume d'oxygène,  $V_{O_2}$ , nécessaire pour un temps  $\Delta t_{max}$  est donc

$$V_{O_2} = 2 \times 10^{-3} \times 12 \times \Delta t_{max} = 0.24 \text{ m}^3.$$

On calcule maintenant le volume occupé,  $V'$ , par l'oxygène une fois libéré de la bouteille. L'oxygène est initialement à une pression  $p_E$  et occupe le volume total de la bouteille  $V_B$ . Au cours de l'expansion, le gaz reste en équilibre thermique. Cela correspond donc à une expansion isothermale. On peut écrire que

$$p_E V_B = p(z_E) V' \Rightarrow V_B = \frac{p(z_E)}{p_E} V'.$$

En égalisant  $V_{O_2}$  et le volume après expansion  $V'$ , on peut résoudre pour le volume de la bouteille  $V_B$ ,

$$V_B = \frac{p(z_E)}{p_E} V_{O_2}. \quad (13)$$

Par application numérique, on trouve

$$V_B = \frac{p(8848) \times 10^{-5} \text{ bar}}{167.25 \text{ bar}} \times 0.24 \text{ m}^3 \simeq 4.78 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

- c) On s'intéresse à la variation de chaleur  $\Delta Q$  entre l'oxygène contenu dans la bouteille lors de son ascension vers le sommet. Comme on s'intéresse à la variation de la chaleur à volume constant, c'est-à-dire à une transformation isochore à  $V_B$  donc pas de travail ( $W = 0$ ), la variation de chaleur  $\Delta Q$  est donnée par le premier principe :

$$\Delta U = Q - \underbrace{W}_{=0} \Rightarrow \Delta U = Q \quad \text{avec} \quad \Delta U = N c_V \Delta T \Rightarrow Q = N c_V \Delta T, \quad (14)$$

avec la chaleur spécifique molaire à volume constant  $c_V = (5/2)R = 20.785 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  pour un gaz diatomique. Le nombre de moles d'oxygène contenu dans la bouteille est

$$N = \frac{P_{0,B} V_B}{RT_0} = \frac{200 \times 10^5 \text{ Pa} \times 4.78 \times 10^{-4} \text{ m}^3}{8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 293.15 \text{ K}} \simeq 3.9225 \text{ mol.}$$

Par application numérique, on trouve

$$\Delta Q = N c_v (T_E - T_0) = 0.02 \text{ mol} \times \frac{5}{2} R \times (245.15 \text{ K} - 293.15 \text{ K}) = -3.91 \times 10^3 \text{ J} < 0.$$

- d) Afin de calculer le temps  $\Delta t$  que met une molécule de  $O_2$  pour parcourir la hauteur  $L = 1 \text{ m}$  de la bouteille cylindrique, il faut déterminer la vitesse quadratique moyenne dans la direction de l'axe de la bouteille, c'est-à-dire  $\overline{v_z^2}$ . Pour une température  $T$ , la vitesse moyenne quadratique est

$$\overline{v^2} = 3 \frac{k_B T}{m_{O_2}},$$

où  $k_B = R/N_A$  est la constante de Boltzmann et  $m_{O_2}$  est la masse d'une molécule d'oxygène. On en déduit que

$$\overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2} = \frac{k_B T}{m_{O_2}}.$$

Ainsi, le temps  $\Delta t$  que met une molécule d'oxygène pour parcourir une distance  $L$  est simplement donné par

$$\Delta t = \frac{L}{\sqrt{\overline{v_z^2}}} = L \sqrt{\frac{m_{O_2} N_A}{RT}}.$$

Par application numérique, au niveau de la mer, c'est-à-dire en  $z = 0$ , avec  $T = 293.15$  K et  $m_{O_2} N_A = 2 \times 16 \times 10^{-3}$  kg mol<sup>-1</sup> pour l'oxygène, on obtient

$$a\Delta t(z = 0) = 1 \text{ m} \times \sqrt{\frac{2 \times 16 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}{8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 293.15 \text{ K}}} \simeq 0.0036 \text{ s} \quad (15)$$

et, au sommet de l'Everest en  $z = z_E$ ,

$$\Delta t(z = z_E) = 1 \text{ m} \times \sqrt{\frac{2 \times 16 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}{8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 245.15 \text{ K}}} \simeq 0.004 \text{ s.} \quad (16)$$

## Exercice 4

**25 points**

2 moles de di-hydrogène ( $H_2$ ), considéré comme un gaz parfait, se trouvent à la température initiale de  $T_A = 3000^\circ C$  et la pression  $p_A = 100$  bars et occupent un volume  $V_A$ . Ce gaz subit les 4 transformations suivantes :

$A \rightarrow B$  Expansion adiabatique jusqu'à  $T_B = 1500^\circ C$ .

$B \rightarrow C$  Expansion adiabatique jusqu'à  $V_C = 2V_B$ .

$C \rightarrow D$  Compression isobare jusqu'à  $V_D = V_A$

$D \rightarrow A$  Transformation isochore.

a) **5 points** Dessinez le cycle dans un diagramme  $p - V$ .

b) **7points** Calculez pour chaque transformation la chaleur échangée.

c) **11 points** Calculez le travail total effectué au cours du cycle.

d) **2 points** Calculez le rendement de ce cycle.

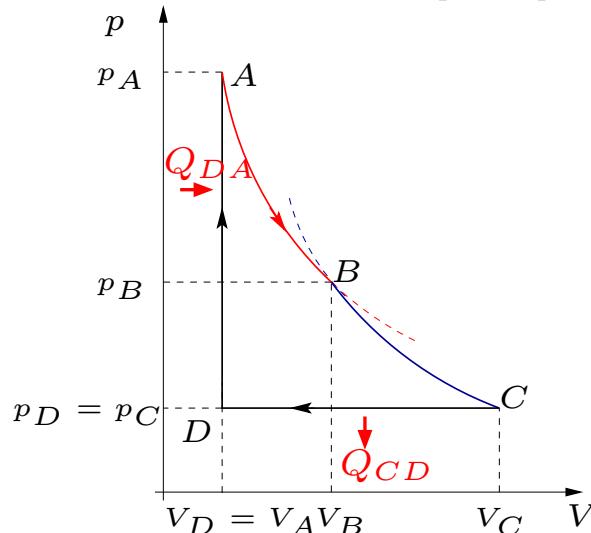
Indication : Constante des gaz parfaits :  $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . En dessous de  $1500^\circ C$ , on négligera les effets vibrationnels. 1 bar =  $10^5 \text{ Pa}$ .

Corrigé

La subtilité de l'exercice est que l'index adiabatique de la transformation  $A \rightarrow B$  n'est pas le même que celui de la transformation  $B \rightarrow C$ . En effet, le nombre de degrés de liberté des molécules dépend de la température :

$$\gamma_{A \rightarrow B} = 1 + \frac{2}{\nu} = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} \quad \text{et} \quad \gamma_{B \rightarrow C} = 1 + \frac{2}{\nu} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

a)  $\gamma_{B \rightarrow C} > \gamma_{A \rightarrow B}$  donc la courbe BC doit être "au dessous" de la courbe AB si celle-ci était prolongée au delà de B. Les 2 autres transformations ne posent pas de problèmes.



	$p [\text{Pa}]$	$V [\text{m}^3]$	$T [\text{K}]$
A	$100 \times 10^5$	$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 0.0054$	3273
B	$p_A \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma_{A \rightarrow B}} \simeq 6.4 \times 10^5$	$V_A \left( \frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma_{A \rightarrow B}-1}} \simeq 0.046$	1773
C	$\frac{nRT_C}{V_C} \simeq 2.4 \times 10^5$	$2V_B = 0.092$	$T_B \left( \frac{V_B}{V_C} \right)^{\frac{1}{\gamma_{B \rightarrow C}-1}} \simeq 1328$
D	$p_C$	$V_A$	$\frac{p_C V_A}{nR} \simeq 78$

b) **Transformation adiabatique AB :**

Par définition, il n'y a pas d'échange de chaleur lors d'une transformation adiabatique on a donc :  $Q_{A \rightarrow B} = 0$ .

On calcule le travail entre A et B, avec  $\gamma = \gamma_{A \rightarrow B}$  :

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_{V_A}^{V_B} pdV = p_A V_A^\gamma \int_{V_A}^{V_B} V^{-\gamma} dV \\ &= p_A V_A^\gamma \frac{1}{1-\gamma} (V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}) = \frac{p_A V_A}{1-\gamma} \left( \left( \frac{T_B}{T_A} \right) - 1 \right) \\ &\simeq 87 \text{ kJ.} \end{aligned} \quad (17)$$

Alors :  $\Delta U_{AB} = -W_{AB} = -87 \text{ kJ.}$

**Transformation adiabatique BC :**

Par définition, il n'y a pas d'échange de chaleur lors d'une transformation adiabatique. Alors :  $Q_{BC} = 0$ .

On calcule le travail entre B et C, avec  $\gamma = \gamma_{B \rightarrow C}$  :

$$\begin{aligned} W_{B \rightarrow C} &= \int_{V_B}^{V_C} pdV = p_B V_B^\gamma \int_{V_B}^{V_C} V^{-\gamma} dV \\ &= p_B V_B^\gamma \frac{1}{1-\gamma} (V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}) = \frac{p_B V_B}{1-\gamma} \left( \left( \frac{V_C}{V_B} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) \\ &\simeq 18 \text{ kJ.} \end{aligned} \quad (18)$$

Alors :  $\Delta U_{BC} = -W_{BC} = -18 \text{ kJ.}$

**Transformation isobare CD :**

On calcule le travail, la variation d'énergie interne et la chaleur échangée entre C et D :

$$W_{C \rightarrow D} = \int_{V_C}^{V_D} pdV = p_C (V_D - V_C) \simeq -21 \text{ kJ.} \quad (19)$$

$$\Delta U_{CD} = nc_v \Delta T = n \left( \frac{5}{2} R \right) \Delta T \simeq -52 \text{ kJ.} \quad (20)$$

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} + W_{CD} = -52 + (-21) = -73 \text{ J.} \quad (21)$$

**Transformation isochore DA :**

Par définition, il n'y a pas de travail lors d'une transformation isochore. Alors :  $W_{D \rightarrow A} = 0$ .

On calcule la chaleur échangée entre D et A :

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = -\Delta U_{ABCD} = -\Delta U_{AB} - \Delta U_{BC} - \Delta U_{CD} = 88 + 18 + 52 = 158 \text{ kJ} \quad (22)$$

c) Le travail total est :

$$W_{\text{cycle}} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A} = 88 + 18 - 21 + 0 = 81 \text{ kJ.} \quad (23)$$

On trouve un travail positif. C'est donc bien un moteur.

d) Le rendement de cycle est :

$$\eta = \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{DA}} = \frac{81}{158} \simeq 0.53. \quad (24)$$

### Méthode alternative :

Une alternative pour calculer le travail lors des transformations adiabatiques  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$  consiste à évaluer directement la variation de l'énergie interne en faisant attention à utiliser les chaleurs spécifiques corrigées selon les degrés de libertés

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta U_{A \rightarrow B} = -nc_V(T_B - T_A) = -n \times \frac{7}{2} \times R \times (T_B - T_A) \simeq 88 \text{ kJ}$$

$$W_{B \rightarrow C} = -\Delta U_{B \rightarrow C} = -nc_V(T_C - T_B) = -n \times \frac{5}{2} \times R \times (T_C - T_B) \simeq 18 \text{ kJ}.$$

En plus, la chaleur  $Q_{D \rightarrow A}$  peut être calculée en tenant compte de l'activation des degrés de vibration à  $T_{\text{vib}} = 1500^\circ\text{C}$  comme

$$Q_{D \rightarrow A} = Q_{D \rightarrow E} + Q_{E \rightarrow A} = \frac{5}{2}R(T_{\text{vib}} - T_D) + \frac{7}{2}R(T_A - T_{\text{vib}}) \simeq 158 \text{ kJ}$$

où E est le point sur la transformation  $D \rightarrow A$  à la température  $T_{\text{vib}}$ .