18 Avril 2024

Exercice 1 - Éruption solaire (25 points)

Dans cet exercice, traitez le Soleil, la Terre (immobile dans le référentiel du Soleil), l'ensemble des particules émises par l'éruption solaire, et le vaisseau comme des points matériels. On définit V'' le référentiel attaché au vaisseau, P' le référentiel attaché aux particules de l'éruption solaire, et S le référentiel attaché au Soleil. Tous les référentiels sont inertiels.

Une éruption solaire émet des particules vers la Terre sur l'axe Soleil-Terre. Dans le réf. P', la Terre se rapproche à une vitesse $v'_T = -0.8c$.

a) En sachant que la distance Soleil-Terre mesurée dans le réf. P' est $d'_{ST} = 10^{11}$ m, quelle est la distance Soleil-Terre mesurée dans le réf. S ?

b) Quelle est la distance Soleil-particules d_{SP} dans le réf. S quand un intervalle de temps $\Delta t'_E = 100$ s (dans le réf. P') s'est écoulé depuis l'éruption solaire ?

Quand les particules se trouvent à la distance d_{SP} calculée au point b), un vaisseau qui voyage vers la Terre sur l'axe Soleil-Terre (avec une vitesse $v_V = 0.5c$ mesurée dans le réf. S) se trouve entre le Soleil et la Terre à une distance de la Terre $d_{VT} = 10^{11}$ m (mesurée dans le réf. S).

c) Combien de temps $\Delta t''_C$ reste-t-il dans le réf. V'' avant que les particules arrivent à la même position que le vaisseau ?

d) Quel est l'intervalle de temps mesuré dans le référentiel V'' entre les deux évènements :
   A) éruption solaire ;
   B) particules qui arrivent à la même position que le vaisseau ;

Un scientifique du vaisseau décide de lancer un atome d'hélium avec $\gamma_{He} = 1.3$ (mesuré dans S) vers le Soleil pour observer une collision avec une particule de l'éruption solaire qui voyage vers le vaisseau.

e) En sachant que l'énergie cinétique relativiste totale de l'atome d'hélium et de la particule de l'éruption solaire avant la collision est $K_{rel,TOT} = 2 \times 10^{-10}$ J (par rapport au ref. S), quelle est la masse de la particule qui entre en collision avec celle d'hélium lancée depuis le vaisseau ?

Le capitaine du vaisseau a l'idée suivante : utiliser une partie des particules pour se faire pousser et ainsi augmenter la vitesse du vaisseau et réduire le temps du voyage vers la Terre (*via* une collision inélastique, dans laquelle le vaisseau et les particules ont la même vitesse après la collision).

f) Si une masse de particules égale à 1% de celle du vaisseau entre en collision avec le vaisseau, de combien est réduit le temps de voyage (en %) dans le réf. S, à partir du moment de la collision ?

Indications : vitesse de la lumière $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. La masse atomique de l'atome d'hélium est $m_{He} = 6.67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Corrigé

a) (**4 points**)
   Si la Terre se déplace à une vitesse $-v'_T$ dans le réf. P', ceci implique que P' se déplace à une vitesse $v_P = -(-v'_T) = 0.8c$ dans le réf. S, ce qui permet de calculer :

$$\gamma_P = \left(\sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}\right)^{-1} = (\sqrt{1 - 0.8^2})^{-1} \simeq 1.67 \tag{1}$$

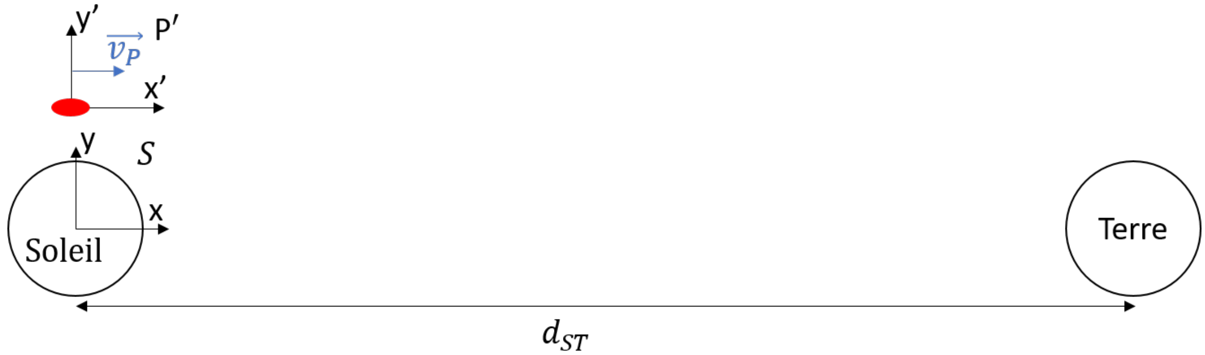

FIGURE 1 – Schéma pour la question a)

La distance Soleil-Terre dans le réf. P' est contractée par rapport à celle dans le réf. S (où il s'agit d'une longueur propre) :

$$d_{ST} = d'_{ST}\gamma_P = 10^{11}\,\mathrm{m} \times 1.67 \simeq 1.7 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \tag{2}$$

b) (**4 points**)

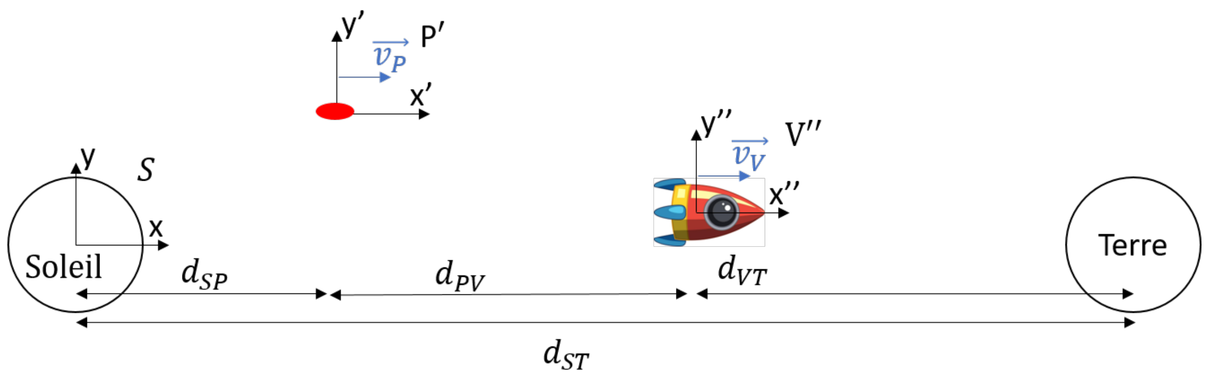

FIGURE 2 – Schéma pour la question b)

L'intervalle de temps $\Delta t'_E$ mesuré dans le réf P' est un intervalle de temps propre. Ceci correspond à un intervalle de temps Δt_E dans le réf. S donné par :

$$\Delta t_E = \Delta t'_E \gamma_P = 100\,\mathrm{s} \times 1.67 \simeq 167\,\mathrm{s} \tag{3}$$

Ce qui nous permet de calculer la distance parcourue par les particules depuis l'éruption dans le réf. S :

$$d_{SP} = v_P \Delta t_E \simeq 0.8 \times 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \times 167\,\mathrm{s} \simeq 4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} \tag{4}$$

c) (**5 points**)
La distance d_{PV} est donnée par :

$$d_{PV} = d_{ST} - d_{SP} - d_{VT} \simeq (1.7 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{10} - 10^{11})\,\mathrm{m} \simeq 2.7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} \tag{5}$$

Dans le réf. S, le temps qui reste avant la collision Δt_C peut être calculé en posant la condition suivante :

$$v_P \Delta t_C = d_{PV} + v_V \Delta t_C \quad \Rightarrow \quad \Delta t_C = \frac{d_{PV}}{(v_P - v_V)} = \frac{2.7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}}{(0.8 - 0.5) \times 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} \simeq 296\,\mathrm{s} \tag{6}$$

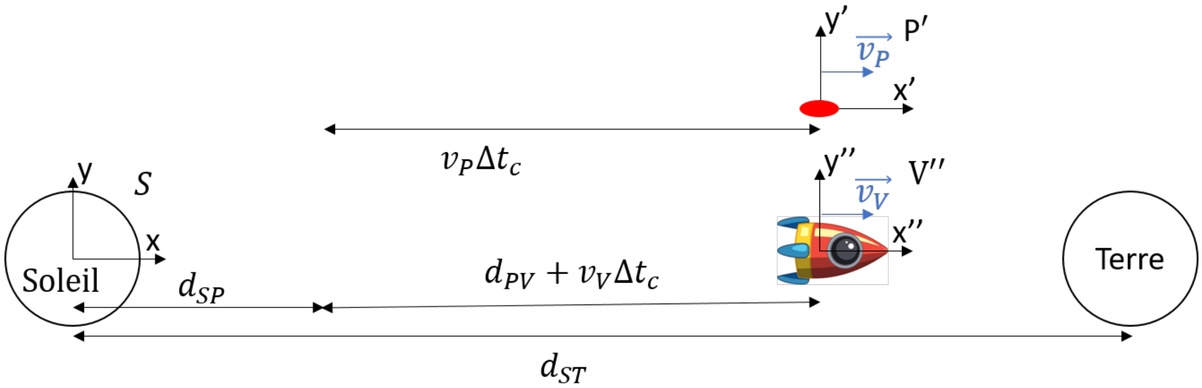

FIGURE 3 – Schéma pour la question c)

Cet intervalle de temps mesuré dans le réf. V'' ($\Delta t''_C$) est un intervalle de temps propre. On obtient :

$$\Delta t''_C = \frac{\Delta t_C}{\gamma_V} = \frac{296\,\mathrm{s}}{1.16} \simeq 256\,\mathrm{s} \quad \text{avec} \quad \gamma_V = \left(\sqrt{1 - \frac{v_V^2}{c^2}}\right)^{-1} = \left(\sqrt{1 - 0.5^2}\right)^{-1} \simeq 1.16 \tag{7}$$

Méthode alternative : dans le référentiel V''
Comme spécifié au cours, il est possible de résoudre cet exercice quel que soit le référentiel choisi. Ici, la résolution dans V'' est significativement plus complexe mais reste possible, comme montré ci-dessous.

La subtilité est que dans V'', le moment "quand les particules se trouvent à une distance d_{SP}" n'est pas simultané à l'événement "quand le vaisseau se trouve à une distance d_{VT}". En effet, ce sont deux événements simultanés dans S mais pas dans les autres référentiels. On doit donc distinguer 3 événements :

A. Distance Soleil-Particules = d_{SP} dans S (au temps t_A), de coordonnée (x''_A, t''_A) dans V''.
B. Distance Terre-Vaisseau = d_{VT} dans S (au temps $t_B = t_A$), de coordonnée (x''_B, t''_B) dans V''.
C. P et V sont à la même position au temps t_C, de coordonnée (0, t''_C) dans V''.

Pour savoir quel est le temps (ou quelle est la distance) entre les événements dans V'', il faut connaître leur ordre. On calcule alors $\Delta t''_{AB}$. Dans S, $\Delta t_{AB} = 0$, mais comme les positions sont différentes dans V'', il faut appliquer Lorentz

$$\Delta t''_{AB} = \gamma_V \left[\Delta t_{AB} - \frac{v_v \Delta x_{AB}}{c^2}\right] = -\gamma_v v_v \frac{d_{PV}}{c^2} \tag{8}$$

On voit que ce temps est négatif ! Dans V'', les événements sont donc perçus dans l'ordre B. → A. → C. Le schéma ci-dessous aide à visualiser les événements dans le référentiel V'' (Figure 4).
La démarche à suivre pour trouver $\Delta t''_C$ est donc la suivante : calculer $\Delta x''$ et $\Delta x''_{AB}$ puis les diviser par v''_P, la vitesse des particules vues dans V''.
La distance $\Delta x''$ est donnée par

$$\Delta x'' = |v''_P . \Delta t''_{AB}| = v''_P \gamma_V v_V \frac{d_{PV}}{c^2} \tag{9}$$

La distance $\Delta x''_{AB}$ est ensuite trouvée grâce aux transformées de Lorentz

$$\Delta x''_{AB} = \gamma_V \left[\Delta x_{AB} - \frac{v_v \Delta t_{AB}}{c^2}\right] = \gamma_v d_{PV} \tag{10}$$

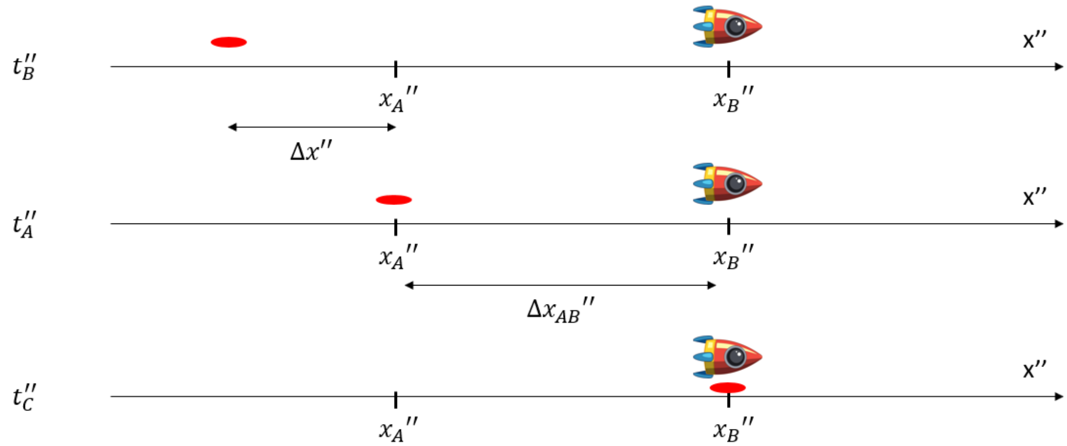

FIGURE 4 – Résolution dans V''

Notez ici que $x_{AB} = d_{PV}$ et que $t_{AB} = 0$.
La distance totale parcourue par les particules dans V'' est donc donnée par $\Delta x'' + \Delta x''_{AB}$. On obtient finalement $\Delta t''_{BC}$ en calculant

$$\Delta t''_{BC} = \frac{\Delta x_{tot}}{v''_P} = \gamma_V d_{PV} \left(\frac{1}{v''_P} + \frac{v_V}{c^2} \right) \tag{11}$$

avec $v''_P = (v_P - v_V)/(1 - \frac{v_V v_P}{c^2})$. En substituant l'expression de v''_P, on retombe bien sur la même relation qu'aux équations (6) et (7), à savoir

$$\Delta t''_{BC} = \frac{d_{PV}}{\gamma_V (v_P - v_V)} \tag{12}$$

d) (**5 points**)
Il faut d'abord définir les deux évènements, avec leur coordonnées temporelles et spatiales :
— $A(t_A, x_A)$
— $B(t_B, x_B)$
En utilisant les transformations de Lorentz, on obtient :

$$\Delta t''_{AB} = \gamma_V \left(\Delta t_{AB} - v_V \frac{\Delta x_{AB}}{c^2} \right) = 1.16 \left[463\,\mathrm{s} - \frac{0.5 \times 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \times 1.1 \cdot 10^{10}}{(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \right] \simeq 321\,\mathrm{s} \tag{13}$$

avec

$$\Delta t_{AB} = \Delta t_E + \Delta t_C \simeq 463\,\mathrm{s} \qquad \Delta x_{AB} = d_{SP} + d_{PV} + v_V \Delta t_c \simeq 1.1 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \tag{14}$$

e) (**3 points**) L'énergie cinétique relativiste de la particule d'hélium lancée depuis le vaisseau est donnée par :

$$K_{rel,He} = (\gamma_{He} - 1) m_{He} c^2 \tag{15}$$

Celle de la particule X de l'éruption solaire qui rentre en collision est :

$$K_{rel,X} = (\gamma_X - 1) m_X c^2 \qquad \text{avec} \qquad \gamma_X = \left(\sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}} \right)^{-1} \tag{16}$$

En sachant d'énergie cinétique relativiste totale $K_{rel,TOT}$, nous pouvons écrire :

$$K_{rel,TOT} = K_{rel,He} + K_{rel,X} = (\gamma_{He} - 1) m_{He} c^2 + (\gamma_X - 1) m_X c^2 \tag{17}$$

et donc :

$$m_X = \frac{K_{rel,TOT} - (\gamma_{He} - 1) m_{He} c^2}{(\gamma_X - 1) c^2} = 3.4 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg} \tag{18}$$

f) (**4 points**)
Puisqu'il y a une collision inélastique, nous pouvons appliquer la conservation de la quantité de mouvement entre les particules et le vaisseau, avant et après la collision, dans S :

$$\gamma_P m_P v_P + \gamma_V m_{V_i} v_V = \gamma_{V_f} m_{V_f} v_{V_f} \tag{19}$$

En utilisant l'information que $m_P = 0.01 m_V$, l'équation peut être réduites à :

$$m_{V_i}(0.01\gamma_P v_P + \gamma_V v_V) = \gamma_{V_f}(1.01 m_{V_i}) v_{V_f} \tag{20}$$

avec laquelle on peut obtenir

$$v_{V_f} = \left[\sqrt{\frac{1.01^2}{(0.01\gamma_P v_P + \gamma_V v_V)^2} + \frac{1}{c^2}}\right]^{-1} \simeq 0.505c \tag{21}$$

Les temps de voyage avant et après la collision, avec une distance à parcourir D, sont :

$$\Delta t_{\text{voy-i}} = \frac{D}{v_{V_i}} \qquad \Delta t_{\text{voy-f}} = \frac{D}{v_{V_f}} \tag{22}$$

La réduction du temps du voyage en S est donnée par :

$$\frac{\Delta t_{\text{voy-i}} - \Delta t_{\text{voy-f}}}{\Delta t_{\text{voy-i}}} = \frac{v_{V_i}}{D}\left(\frac{D}{v_{V_i}} - \frac{D}{v_{V_f}}\right) = \frac{(v_{V_f} - v_{V_i})}{v_{V_f}} = \frac{0.005c}{0.505c} \simeq 1\% \tag{23}$$

Exercice 2 - Cylindre et piston (25 points)

Un récipient cylindrique isolé thermiquement contient 1 môle de gaz parfait monoatomique. Le récipient est fermé par un piston (également isolé thermiquement) de masse négligeable et de section A = 400 cm^2, qui peut coulisser sans frottement dans la direction de l'axe du cylindre. Le cylindre est posé verticalement. À l'état initial, une masse $m = 200$ kg est posée sur le piston tel que le système gaz + piston est à l'équilibre mécanique. La pression atmosphérique externe est de 1 bar. À l'état initial, la température du gaz est de 146 °C. La masse m est instantanément enlevée du piston, créant ainsi une situation hors équilibre. Le piston se déplace en effectuant une transformation irréversible jusqu'à un nouvel équilibre mécanique (état final).

a) Quel est le volume occupé par le gaz dans l'état initial ?
b) Calculez le volume et la température du gaz dans l'état final.
c) Si le gaz dans le récipient était diatomique, la température à l'état final serait-elle plus ou moins élevée que celle calculée au point b) ? Justifiez votre réponse avec une équation.
d) A l'état final correspondant au point b), calculez le temps quadratique moyen qu'une molécule d'oxygène met pour traverser le cylindre depuis la base jusqu'au piston.

Indications : Masse moléculaire de l'oxygène $m_{O_2} \simeq 5.3 \cdot 10^{-26}$ kg. Constante universelle des gaz parfaits $R = 8.31$ J/mol/K. Accélération gravitationnelle $g = 9.81$ m/s^2.

Corrigé

a) (**5 points**)
La résultante des forces sur le piston à l'état initial est nulle (puisque le système est à l'équilibre mécanique), donc la force sur le piston à l'intérieur du cylindre doit être égale à la force à l'extérieur.

$$mg + p_{atm} \cdot A = p_i \cdot A \qquad p_i = \frac{mg}{A} + p_{atm} \tag{24}$$

$$p_i V_i = nRT_i \qquad V_i = \frac{nRT_i}{p_i}. \tag{25}$$

Application numérique :

$$p_i = \frac{200 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2}{0.04 \text{ m}^2} + 10^5 \text{ Pa} = 1.49 \cdot 10^5 \text{ Pa} \tag{26}$$

$$V_i = \frac{1 \text{ mol } \times 8.31 \text{ J/K mol} \times 419 \text{ K}}{1.49 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 0.023 \text{ m}^3. \tag{27}$$

b) (**10 points**) La pression finale à l'intérieur du cylindre est égale à la pression atmosphérique puisqu'à l'état final le système est à l'équilibre mécanique :

$$p_f = p_{atm}. \tag{28}$$

L'expansion est adiabatique puisque le système est isolé thermiquement, mais comme l'expansion est rapide (hors équilibre) elle est irréversible. Pour répondre à la question on ne peut donc pas utiliser la formule $pV^\gamma = const$ (valable uniquement pour une adiabatique réversible), mais on doit utiliser le premier principe, qui est toujours valable. Donc, en utilisant le premier principe :

$$\Delta U = Q - W. \tag{29}$$

Comme le cylindre est parfaitement isolé thermiquement, $Q = 0$

$$c_v n \Delta T = W. \tag{30}$$

Le travail effectué par le système correspond à la force résultante pA multipliée par la distance Δh parcourue par le piston :

$$W = p_f A \Delta h = p_f(V_f - V_i) \tag{31}$$

Nous obtenons, avec la loi des gaz parfaits, 2 équations et 2 inconnues (V_f, T_f)

$$p_f(V_f - V_i) = -c_v n(T_f - T_i) \quad \text{et} \quad p_f V_f = nRT_f \tag{32}$$

En combinant les deux équations, on obtient

$$c_v n(T_f - T_i) = p_f\big(\frac{nRT_f}{p_f} - V_i\big). \tag{33}$$

On substitue $c_v = \nu/2R$

$$T_f = \frac{p_f V_i + \upsilon/2RnT_i}{\upsilon/2Rn + nR} \tag{34}$$

pour un gaz monoatomique $\nu = 3$ (ν est le nombre de dégrées de liberté)

$$T_f = 3/5T_i + \frac{p_f V_i}{5/2nR} \tag{35}$$

$$V_f = \frac{nRT_f}{p_f} \tag{36}$$

Application numérique

$$T_f = \frac{3}{5} \times 419 \text{ K} + \frac{10^5 \text{ Pa } \times 0.023 \text{ m}^3}{5/2 \times 1 \text{ mol} \times 8.31 \text{ J/K/mol}} \simeq 364 \text{ K} \tag{37}$$

$$V_f = \frac{1 \text{ mol} \times 8.31 \text{ J/K/mol} \times 364 \text{ K}}{10^5 \text{ Pa}} = 0.030 \text{ m}^3 \tag{38}$$

c) (**5 points**)
Pour un gaz diatomique $\nu = 5$

$$c_v = \frac{5}{2}R \tag{39}$$

En partant de l'équation 34, on obtient :

$$T_f = 5/7T_i + \frac{p_f V_i}{7/2nR} \tag{40}$$

Application numérique

$$T_f = \frac{5}{7} \times 419\,\mathrm{K} + \frac{10^5\ \mathrm{Pa} \times 0.023\ \mathrm{m}^3}{7/2 \times 1\ \mathrm{mol} \times 8.31\ \mathrm{J/K/mol}} \simeq 380\ \mathrm{K} \tag{41}$$

d) (**5 points**) En partant d'une distribution de Maxwell des vitesses des molécules, on sait que la vitesse quadratique moyenne :

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_bT}{m}}. \tag{42}$$

Pour obtenir le temps, on utilise la distance à parcourir d, étant la hauteur du cylindre dans l'état final :

$$t = \frac{d}{v_{rms}} = \frac{V_f}{Av_{rms}}. \tag{43}$$

Application numérique :

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \cdot 10^{-23}\mathrm{J/K} \times 364\ \mathrm{K}}{5.3 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}}} = 537\,\mathrm{m/s} \tag{44}$$

$$t = \frac{0.030\ \mathrm{m}^3}{0.04\ \mathrm{m}^2 \times 537\ \mathrm{m/s}} = 0.0014s. \tag{45}$$

Exercice 3 - Cycle Thermodynamique (25 points)

Un cycle thermodynamique, composé des quatre transformations suivantes considérées comme réversibles, est effectué par 100 môles d'un gaz parfait monoatomique :

1) A $\Rightarrow$ B : expansion isobare depuis [$p_A = 10^6$ Pa, $V_A = 1$ m^3] jusqu'à $V_B = 2$ m^3,
2) B $\Rightarrow$ C : transformation isochore jusqu'à $p_C = 10^5$ Pa.
3) C $\Rightarrow$ D : transformation isobare.
4) D $\Rightarrow$ A : transformation isotherme.

Les états A, B, C et D sont des états d'équilibre.

a) Calculez les valeurs (T, p, V) des états A, B, C, D. Ensuite, tracez le cycle dans un diagramme $p-V$ en indiquant le sens dans lequel chaque transformation est parcourue.
b) Calculez le travail et la chaleur échangée lors de chaque transformation 1), 2), 3), 4), ainsi que pour le cycle complet.

Lors de la transformation 4), la chaleur est échangée uniquement avec une barre métallique avec coefficient de dilatation linéaire $\alpha = 2 \cdot 10^{-6}\ {}^o\mathrm{C}^{-1}$ et masse $m_{bar} = 1$ kg.

c) À chaque cycle, la barre se dilate-t-elle ou se contracte-t-elle ? Justifiez votre réponse.
d) En sachant qu'après 1 cycle la barre a modifié sa longueur de 2%, calculer la chaleur spécifique massique de la barre.

Lors de la transformation 3), la chaleur est échangée uniquement avec du Nickel liquide de masse 5 kg qui se trouve à la température initiale de 2250 K quand le gaz se trouve dans l'état C.

e) A la fin de la transformation 3), le Nickel s'est-il chauffé ou refroidit ? Y-a-t il eu une transformation de phase ? Si oui, quelle est la masse du Nickel liquide à la fin de la transformation 3) ?

Indications : Chaleur latente de fusion de Nickel $L_{Ni} = 298\,\mathrm{kJ\ kg}^{-1}$. Chaleur spécifique massique du Nickel liquide $c_{Ni} = 663$ J kg^{-1}K^{-1}. Température de fusion du Nickel $T_{f-Ni} = 1455°$C. Constante universelle des gaz parfaits $R = 8.31$ J/mol/K.

Corrigé

a) (**5 points**) Pour tracer le cycle, nous devons d'abord trouver le volume au point D. On peut le trouver à partir de la loi des gaz parfaits pour la transformation isotherme D $\Rightarrow$ A :

$$P_AV_A = P_DV_D => V_D = V_A\frac{P_A}{P_D} = 1\mathrm{m}^3 \times \frac{10^6\,\mathrm{Pa}}{10^5\,\mathrm{Pa}} = 10\ \mathrm{m}^3. \tag{46}$$

Le température peuvent être obtenues à partir des valeurs de p et V de chaque état d'équilibre :

$$T_D = T_A = \frac{p_AV_A}{nR} = \frac{10^6\,\mathrm{Pa} \times 1\,\mathrm{m}^3}{100\,\mathrm{mol} \times 8.31\,\mathrm{J/mol/K}} \simeq 1203\,\mathrm{K} \tag{47}$$

$$T_B = \frac{p_BV_B}{nR} = \frac{10^6\,\mathrm{Pa} \times 2\,\mathrm{m}^3}{100\,\mathrm{mol} \times 8.31\,\mathrm{J/mol/K}} \simeq 2408\,\mathrm{K} \tag{48}$$

$$T_C = \frac{p_CV_C}{nR} = \frac{10^5\,\mathrm{Pa} \times 2\,\mathrm{m}^3}{100\,\mathrm{mol} \times 8.31\,\mathrm{J/mol/K}} \simeq 241\,\mathrm{K} \tag{49}$$

Nous pouvons donc résumer les valeurs p, V, T :

	A	B	C	D
P [Pa]	10^6	10^6	10^5	10^5
V [m^3]	1	2	2	10
T [K]	1203	2408	241	1203

Connaissant toutes les valeurs, on peut tracer le diagramme 5 :

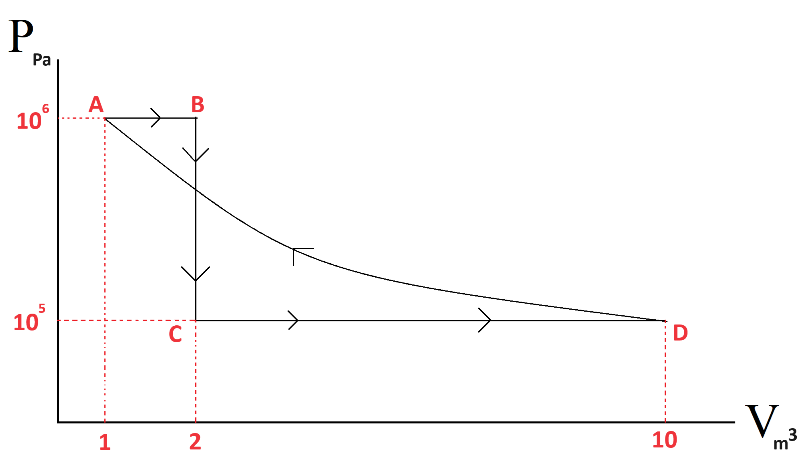

FIGURE 5 – Schéma pour la question a)

b) (**8 points**) Pour retrouver la chaleur échangée, il faut retrouver le travail et l'évolution de l'énergie interne. Pour chaque transformation du cycle les calculs sont les suivants :

1) **Expansion isobare A $\Rightarrow$ B :**

On calcule le travail et l'énergie interne :

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} pdV = p_A(V_B - V_A) = 10^6\,\mathrm{Pa} \times (2-1)\,\mathrm{m}^3 = 10^6\,\mathrm{J}, \tag{50}$$

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2}nRT_B - \frac{3}{2}nRT_A = \frac{3}{2} \times 100\,\text{mol} \times 8.31\text{J/mol/K} \times (2408 - 1203)\,\text{K} = 1.5 \cdot 10^6\,\text{J}, \quad (51)$$

Ainsi,

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = 2.5 \cdot 10^6\,\text{J}. \quad (52)$$

2) **Transformation isochore B ⇒ C :** Puisque la variation de volume est nulle, le travail est également nul :

$$W_{BC} = 0. \quad (53)$$

Et l'énergie interne est calculée par :

$$\Delta U_{BC} = \frac{3}{2}nRT_C - \frac{3}{2}nRT_B = \frac{3}{2} \times 100\,\text{mol} \times 8.31\text{J/mol/K} \times (241 - 2408)\,\text{K} = -2.7 \cdot 10^6\,\text{J}. \quad (54)$$

On obtient la chaleur dans cette transformation :

$$Q_{BC} = W_{BC} + \Delta U_{BC} = -2.7 \cdot 10^6\,\text{J}. \quad (55)$$

3) **Transformation isobare C ⇒ D :** Le calcul est identique à la transformation A ⇒ B :

$$W_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} pdV = p_C(V_D - V_C) = 10^5\,\text{Pa} \times (10 - 2)\,\text{m}^3 = 8 \cdot 10^5\,\text{J}, \quad (56)$$

$$\Delta U_{CD} = \frac{3}{2}nRT_D - \frac{3}{2}nRT_C = \frac{3}{2} \times 100\,\text{mol} \times 8.31\text{J/mol/K} \times (1203 - 241)\,\text{K} = 12 \cdot 10^5\,\text{J}. \quad (57)$$

On obtient la chaleur :

$$Q_{CD} = W_{CD} + \Delta U_{CD} = 2 \cdot 10^6\,\text{J}. \quad (58)$$

4) **Transformation isotherme D ⇒ A** : Le travail est calculé par :

$$W_{DA} = \int_{V_D}^{V_A} pdV = \int_{V_D}^{V_A} \frac{P_D V_D}{V} dV = P_D V_D \log\left(\frac{V_A}{V_D}\right) = \quad (59)$$

$$= 10^5\,\text{Pa} \times 10\,\text{m}^3 \times \log\left(\frac{1}{10}\right) = -2.3 \cdot 10^6\,\text{J}, \quad (60)$$

où nous avons utilisé la loi des gaz parfaits dans le cas de l'isotherme $P_D V_D = PV$. Puisque l'énergie interne est proportionnelle au changement de température et que la température est la même, l'énergie interne est nulle :

$$\Delta U_{DA} = 0. \quad (61)$$

Ainsi,

$$Q_{DA} = W_{DA} + \Delta U_{DA} = -2.3 \cdot 10^6\,\text{J}. \quad (62)$$

Finalement, la chaleur totale échangée et le travail pour le cycle complet sont :

$$Q_{cycle} = W_{cycle} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = -0.5 \cdot 10^6 J. \quad (63)$$

Le signe négatif indique que de la chaleur et le travail sont générés par le cycle, le processus agit donc comme un réfrigérateur. Les sens de chauffe sont indiqués sur un schéma 6.

c) (**3 points**) La chaleur reçue par le gaz est la chaleur apportée par le barre métallique, soit :

$$Q_{barre} = -Q_{DA}. \quad (64)$$

Donc, si $Q_{DA} < 0$, cela signifie que $Q_{barre} > 0$.
Si nous utilisons des équations pour la chaleur échangée et la dilatation thermique avec m la masse de la barre métallique : $Q = mc\Delta T$, $\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$, on obtient une équation pour un changement relatif de longueur :

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\alpha}{mc} Q_{barre}. \quad (65)$$

Ainsi, puisque $Q_{barre} > 0$ nous pouvons voir que $\epsilon > 0$ aussi. Donc, la barre va se dilater.

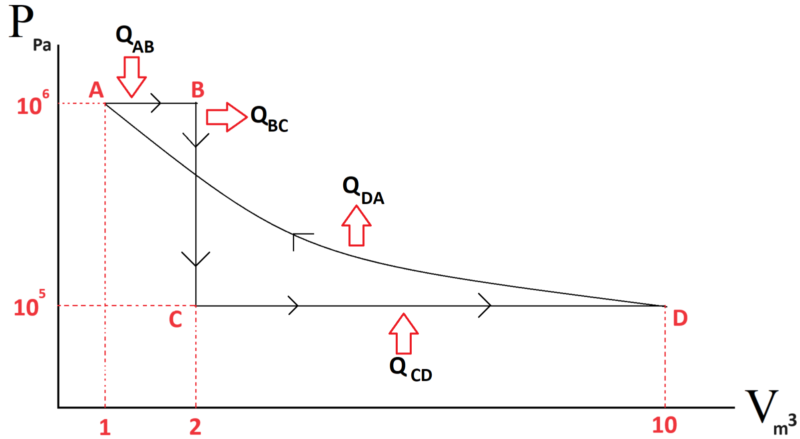

FIGURE 6 – Schéma pour la question b)

d) (**2 points**) Pour le calcul, il suffit de réorganiser l'équation 65 :

$$c = \frac{\alpha}{m\epsilon} Q_{barre} = \frac{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1} \times 2.3 \cdot 10^{6}\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{kg} \times 0.02} = 230 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}. \tag{66}$$

e) (**7 points**) De manière analogue à la question c), nous pouvons écrire :

$$Q_{Ni} = -Q_{CD}, \tag{67}$$

où on voit $Q_{CD} > 0$ et $Q_{Ni} < 0$. Ainsi, parce que $\Delta T_{Ni} = \frac{Q_{Ni}}{m_{Ni} c_{Ni}}$, on a $\Delta T_{Ni} < 0$ ce qui signifie que le nickel va se refroidir.
Pour vérifier s'il y aura une transition de phase, nous devons comparer la quantité de chaleur nécessaire pour réduire la température du nickel (Q_1) jusqu'au point de fusion avec la chaleur fournie au bain :

$$Q_1 = m_{Ni} c_{Ni} \Delta T_{Ni} = 5\,\mathrm{kg} \times 663\,\mathrm{J\ K\ kg}^{-1} \times (2250 - 1728)\,\mathrm{K} = 1.73 \cdot 10^{6}\,\mathrm{J}. \tag{68}$$

où c_{Ni} est chaleur spécifique massique du Nickel liquide en phase liquide. Puisque Q_{Ni} est plus grand que Q_1, il y aura une transition de phase et la chaleur excédentaire (Q_2) sera utilisée pour solidifier une partie du nickel liquide. Pour trouver la masse, nous pouvons utiliser :

$$Q_2 = Q_{Ni} - Q_1 = m_{Ni,solide} L_{Ni}, \tag{69}$$

étant L_{Ni} la chaleur latente de fusion du Nickel. Ainsi,

$$m_{Ni,solide} = \frac{Q_2}{L_{Ni}} = \frac{(2 \cdot 10^{6} - 1.73 \cdot 10^{6})\,\mathrm{J}}{2.98 \cdot 10^{5}\,\mathrm{J/kg}} = 0.91\,\mathrm{kg}. \tag{70}$$

Et enfin la masse du nickel liquide : $m_{Ni,liquide} = (5 - 0.91)\,\mathrm{kg} = 4.19\,\mathrm{kg}$.