

④ Une pompe

Une pompe

On fait le vide dans une bouteille de volume V_0 contenant de l'air à la pression initiale p_0 . La température reste pratiquement invariable pendant le pompage. A chaque tour de la pompe, de l'air de la bouteille emplit le volume u du cylindre de la pompe, à la pression p de la bouteille, puis est rejeté dans l'atmosphère. On suppose que l'air est un gaz parfait.

1. Cas discret : trouver la pression de la pompe après n cycles en fonction de u et V_0 .

$$p_n = \dots\dots\dots$$

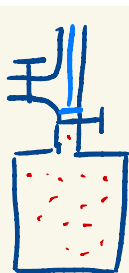
2. Cas continu : trouver la pression p de la pompe en fonction du temps, de u , V_0 et de la fréquence de rotation f de la pompe.

Indice : Commencer par exprimer la quantité d'air pompée dy pendant un cours instant dt .

$$p(t) = \dots\dots\dots$$

3. Montrer que dans la limite $u \ll V_0$ les deux résultats coïncident.
4. Au bout de combien de temps la pression a-t-elle chuté à 1 Pa, si $V_0 = 2000 \text{ cm}^3$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $u = 50 \text{ cm}^3$, $f = 300 \text{ tours/minute}$?

$$t = \dots\dots\dots$$



$$\textcircled{1} \\ p_0 \quad V_0 \\ x_0 \quad T_0$$



$$\textcircled{2} \\ p_1 \quad (V_0 + u) \\ x_0 \quad T_0$$



$$\textcircled{3} \\ p_1 \quad V_0 \\ x_1 \quad T_0$$

x_n : nombre de moles
après
 n cycles

$$p_0 V_0 = x_0 R T_0$$

$$p_1 (V_0 + u) = x_0 R T_0$$

$$p_1 V_0 = x_1 R T_0$$

Après n cycles :

$$\textcircled{1} \quad P_n V_0 = x_n R T_0$$

$$\textcircled{2} \quad P_{n+1} (V_0 + V) = x_n R T_0$$

$$\textcircled{3} \quad P_{n+1} V_0 = x_{n+1} R T_0$$

$$P_{n+1} (V_0 + V) = P_n V_0$$

$$P_{n+1} = \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right) P_n = \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right)^2 P_{n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right)^n P_0}$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\text{Cas continu}}: \quad \begin{array}{cc} p(t) & R \\ V_0 & T_0 \\ x(t) & \end{array}$$

$$p(t) V_0 = x(t) R T$$

Pendant dt , la pompe fait $f \cdot dt$ cycles

$\Rightarrow$ elle extrait $v \cdot f \cdot dt$ volume

Ce volume contient dy moles

$$\left[p \, u \, dt = dy \, R T_0 \right]$$

Pendant dt , le nombre de moles extraites de V_0 :

$$dx = -dy$$

$$p(t) V_0 = x(t) R T_0$$

$$dp \, V_0 = dx \, R T_0 \quad \text{et} \quad dx = - \frac{p u}{R T_0} dt$$

$$V_0 dp = -p u \, dt$$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{u t}{V_0} dt$$

$$\int_{t_0}^t \frac{dp}{p} = - \int_{t_0=0}^t \frac{u t}{V_0} dt$$

$$\ln\left(\frac{p(t)}{p_0}\right) = - \frac{u t}{V_0} t$$

$$\Rightarrow p(t) = p_0 e^{-\frac{u t}{V_0} t}$$

③ limite $u \ll V_0$

$$\textcircled{A} P_{n+1} = \left(\frac{V_0}{V_0 + u} \right) P_n$$

$$\textcircled{B} P(t) = P_0 e^{-\frac{u}{V_0} t}$$

$$\textcircled{A} \frac{V_0}{V_0 + u} = \frac{1}{1 + \frac{u}{V_0}} = \left(1 + \frac{u}{V_0} \right)^{-1} \stackrel{u \ll V_0}{\approx} 1 - \frac{u}{V_0}$$

$$P_n \approx \left(1 - \frac{u}{V_0} \right)^n P_0$$

$$\textcircled{B} P(t) = P_0 e^{-\frac{u}{V_0} t} \quad t \cdot t = n$$

$$= P_0 e^{-\frac{un}{V_0}}$$

$$= P_0 \left(e^{-\frac{u}{V_0}} \right)^n$$

$$et \quad e^{-\frac{u}{V_0}} \stackrel{u \ll V_0}{\approx} 1 - \frac{u}{V_0}$$

$$\Rightarrow P_n = P_0 \left(1 - \frac{u}{V_0} \right)^n \quad \checkmark$$

$$(4) \quad P = P_0 e^{-\frac{v_f t}{V_0}}$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{v_f t}{V_0}$$

$$t = -\frac{V_0}{v_f} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

$$\text{A.N.: } t = -\frac{2000 [\text{cm}^3]}{50 [\text{cm}^3] \cdot 300 [\text{turns/min}]} \cdot \ln(10^{-5})$$

$$= 1.54 \quad \text{minute}$$

$$= 92 \text{ s}$$