

27 février 2025

Série 2 : Compléments mathématiques, hydrostatique et dilatation thermique

Exercice 1: Dérivées partielles (Niveau 1)

Soit la fonction $F(x, y, z) = x^2 + 3x^2y + 2zx$. Calculez:

- (a) $\frac{\partial F}{\partial x}$
- (b) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$
- (c) $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$
- (d) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

Exercice 2: Vous avez dit différentielle totale ? (Niveau 1-2)

Est-ce que les formes différentielles suivantes sont totales exactes ou non:

- (a) $\delta q = nc_{V,m}dT + \frac{nRT}{V}dV$, où l'on supposera n et $c_{V,m}$ constants.
- (b) $\delta X_1 = -ydx + xdy + zdz$.
- (c) $\delta X_2 = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy$.
- (d) $\delta g = \frac{av}{w} \cos(uv)du + \frac{au}{w} \cos(uv)dv - \frac{a}{w^2} \sin(uv)dw$, où l'on supposera a constant.

Exercice 3: Coefficient de dilatation (Niveau 2)

Le coefficient de dilatation isobare ou coefficient de dilatation à pression constante, α , donne l'augmentation relative du volume d'un corps lorsque la température varie à pression constante.

(a) Donner l'expression de α à l'aide de variables d'état et de leurs dérivées partielles.

(b) Que vaut α pour :

1. un gaz parfait

$$pV = nRT;$$

2. le gaz d'équation d'état

$$p(V - nb) = nRT;$$

3. un gaz de Van der Waals

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT.$$

(c) Le coefficient de dilatation à pression constante d'une substance est

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{3aT^3}{V}$$

et son coefficient de compressibilité est

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{b}{V},$$

où a et b sont des constantes. Trouver l'équation d'état $V = f(p, T)$ de la substance.

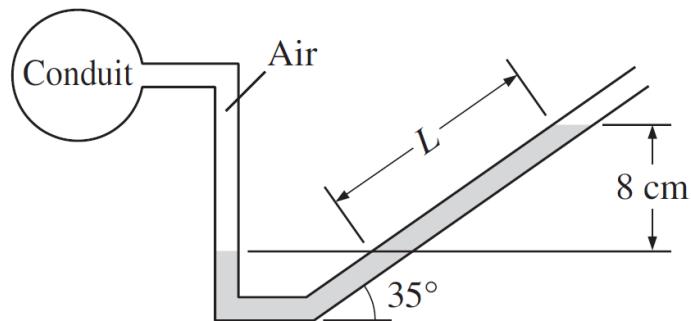
Exercice 4: Le thermomètre de Galilée (Niveau 1-2)

Le thermomètre de Galilée est constitué d'un cylindre de verre scellé contenant un liquide transparent (en général de l'eau) et une série d'objets similaires flottant ou non (cf. image). A chaque objet est attaché une petite pièce de poids différent sur laquelle est indiquée une température. La température ambiante se lit en observant quelles pièces flottent proche de la surface du liquide et quelles pièces sont au fond du cylindre. On suppose ici que le cylindre est composé d'eau de densité ρ_{eau} .

- Quelles sont les forces appliquées sur chacun des objets ?
- Sur quel principe physique le thermomètre de Galilée se base-t-il ?
- Pourquoi les objets se déplacent verticalement lorsque la température change ?
- On suppose un objet immergé dans le cylindre, en équilibre (immobile). Si la température de l'eau augmente, dans quelle direction l'objet aura tendance à se déplacer ? Indication: la densité de l'eau diminue avec une augmentation de la température.
- On suppose deux objets, on accroche sur l'objet 1 une pièce indiquant 23 °C et sur l'objet 2 une pièce indiquant 24 °C. Pour que le thermomètre fonctionne, quelle pièce doit être la plus lourde ?



Exercice 5: Problème du Manomètre Incliné (Niveau 1)



Afin de mesurer une différence de pression avec plus de précision, il arrive qu'une des colonnes du tube en U d'un manomètre soit inclinée.

Dans cet exercice, la pression de l'air à l'intérieur du conduit est mesurée à l'aide d'un manomètre dont une des colonnes est inclinée à 35° par rapport à l'horizontale. La masse volumique du liquide dans le tube est de 0.81 kg/L, et la différence entre les niveaux de liquide dans les colonnes est de 8 cm.

- Déterminez la pression de l'air dans le conduit.

- (b) Déterminez la longueur L de la colonne inclinée.
- (c) Déterminez la différence de hauteur entre les deux tubes si le tube de droite n'était pas incliné.
- (d) Expliquez pourquoi un manomètre avec tube incliné permet une meilleure précision dans la mesure de la pression.

Exercice 6: Prolongation du métro M2 (Niveau 1)

La ligne du métro M2 a une longueur de 5.9 km (mesurée un jour de température extérieure égale à 0°C).

- (a) Quelle sera sa longueur à 35°C ?
- (b) Supposez que les extrémités des rails (à Ouchy ainsi qu'aux Croisettes) sont fixées rigidement à 0°C , empêchant toute dilatation. Quelle sera la contrainte (la force de compression par unité de surface) dans le rail si sa température atteint 35°C ? La voie ferrée est considérée sans virages.
- (c) Le rail a une section de $A = 50 \text{ cm}^2$. Quelle sera la force de compression dans le rail ?
- (d) En connaissant la contrainte de rupture¹ σ_{UTS} , quelle serait la température provoquant la rupture du rail ?

Indication : $\alpha_{\text{acier}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, module de Young de l'acier $E_{\text{acier}} = \frac{F}{A} \cdot \frac{L_0}{\Delta L} = 2.6 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ et contrainte de rupture: $\sigma_{\text{UTS}} = 1.175 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

¹ *ultimate tensile strength* en anglais