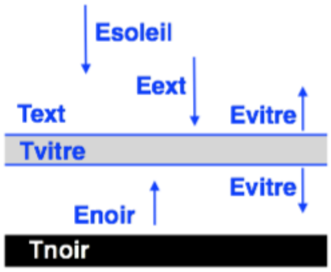
Série d'exercices n°14

Solution de l'exercice 1

1. A l'équilibre thermodynamique, tout objet réel rayonne autant qu'il absorbe.



Pour le revêtement sombre, le bilan des échanges d'énergie s'écrit de la manière suivante :

$$E_n = E_s + E_v$$

où E_v est l'énergie émise par la surface inférieure de la vitre (on aura donc $E_v^{\text{tot}} = 2E_v$). On notera que E_{ext} n'est pas présent dans cette équation car la vitre absorbe 100% de ce rayonnement avant qu'il atteigne le sol. En utilisant la loi de Stefan, on peut réécrire cette expression en remplaçant les énergies émises par les températures des objets :

$$\sigma T_n^4 = E_s + \sigma T_v^4$$

2. A partir du même raisonnement, on écrit le bilan des échanges d'énergie pour la vitre :

$$2E_v = E_n + E_{ext}$$

On a cette fois $2E_v$ car la vitre émet vers le haut et vers le bas. En utilisant la loi de Stefan, on obtient finalement :

$$2\sigma T_v^4 = \sigma T_n^4 + \sigma T_e^4$$

3. En regroupant les résultats obtenus aux points 1. et 2. et en éliminant T_v, on obtient :

$$T_n = \left(T_e^4 + \frac{2E_s}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$

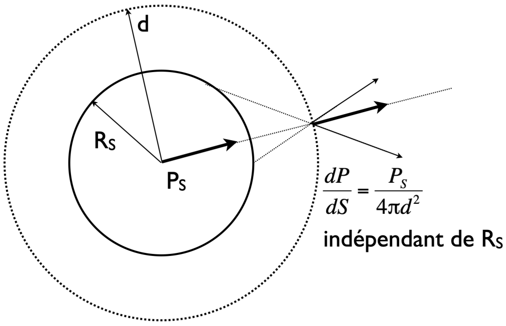
4. $T_n = 460$ K. *Remarque : Si on considère que le revêtement absorbant est en contact avec l'environnement extérieur également par la face arrière (i.e. sans vitre entre deux), un calcul très semblable donne :*

$$\begin{aligned} 2E_n &= E_s + E_v + E_{ext} \\ 2E_v &= E_n + E_{ext} \\ T_n &= \left(T_e^4 + \frac{2E_s}{3\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2

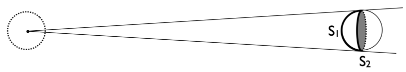
1. On commence par calculer la puissance totale émise par l'étoile :

$$P_s = \epsilon_s A_s \sigma T_s^4 = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4$$



Cette puissance est émise dans l'espace de façon isotrope. La fraction de cette puissance reçue par une unité de surface située à une distance d de l'étoile vaut donc $P_s/(4\pi d^2)$. Ainsi, la puissance reçue par une planète de rayon R_p située à cette distance vaut :

$$P_{\text{reçu}} = P_s \frac{\pi R_p^2}{4\pi d^2} = \pi\sigma T_s^4 \frac{R_s^2 R_p^2}{d^2}$$



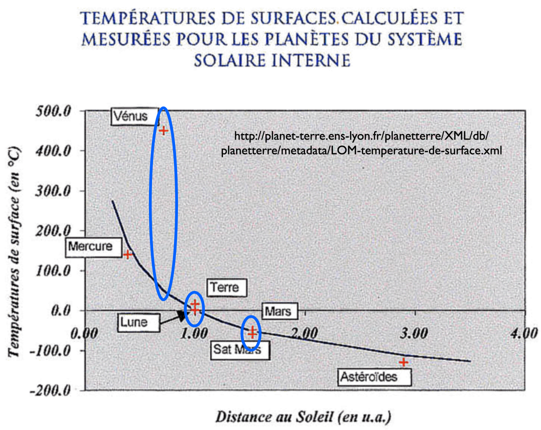
2. La puissance émise par la planète peut être calculée avec la loi de Stefan, connaissant sa température T_p :

$$P_{\text{émis}} = 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$$

3. A l'équilibre thermodynamique, tout objet réel rayonne autant qu'il absorbe :

$$P_{\text{émis}} = P_{\text{reçu}} \Rightarrow T_p = \sqrt{\frac{R_s}{2d}}\, T_s$$

4. L'application numérique donne $T_s \approx 5960$ K, ce qui est en assez bon accord avec la température trouvée en analysant le spectre du rayonnement solaire (5780 K).



Solution de l'exercice 3

1. Voir feuille
2. Oui, car T,S,p,V sont des fonctions d'état.
3. $dH = dU + d(pV) = -pdV + TdS + pdV + Vdp = TdS + Vdp$
   Utile pour les transformations isobares / changements de phase.
4. (a) Oui, car U, T, S sont des fonctions d'état.
   (b) $dF = dU - d(TS) = TdS - pdV - TdS - SdT = -pdV - SdT$
   (c) Transformation isotherme : $dT = 0$, donc $dF = -pdV$; dF est une différentielle totale exacte, donc pour une isotherme $-pdV$ est aussi une différentielle totale exacte.
5. (a) $\Delta F = 0$ car il s'agit d'un chemin cyclique et F est une fonction d'état.
   (b) L'aire sous la courbe $p(V)$ du diagramme (p,V) entre V_1 et V_2.
   (c) On considère un chemin cyclique de V_L à V_L : à l'aller le long du palier de liquéfaction, au retour le long de la courbe de Van der Waals. Ce sont deux transformations isothermes, donc l'intégrale de dF sur ce cycle doit être nulle. Une aire est comptée positivement, l'autre négativement : elles doivent être égales pour que la somme fasse 0. C'est la règle de Maxwell.
6. (a)

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \qquad pdV = \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV$$

   En intégrant entre V_L et V_G, avec $p = p_{\text{sat}} = \text{constante}$ et $T = \text{constante}$:

$$p_{\text{sat}}(V_G - V_L) = RT \ln\left(\frac{V_G - b}{V_L - b}\right) + a\left(\frac{1}{V_G} - \frac{1}{V_L}\right)$$

$$f = RT \ln\left(\frac{V_G - b}{V_L - b}\right) + a\left(\frac{1}{V_G} - \frac{1}{V_L}\right) - p_{\text{sat}}(V_G - V_L) = 0$$

   (b) $p_{\text{sat}}(V_G - V_L)$ est l'aire du rectangle délimitée par la courbe de saturation et les volumes V_L et V_G.
   L'expression $RT \ln\left(\frac{V_G-b}{V_L-b}\right) + a\left(\frac{1}{V_G} - \frac{1}{V_L}\right)$ est l'aire sous l'isotherme de Van der Waals. Les deux aires étant égales, la règle de Maxwell est vérifiée.