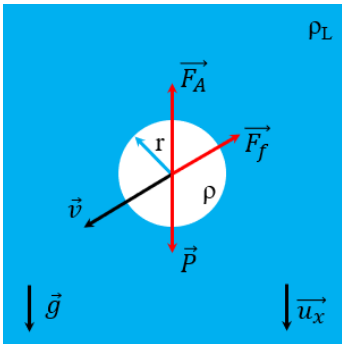
Série d'exercices n°4

** Exercice 1 *Stabilité d'un colloïde*

Exercice qui prépare à l'exercice suivant. La première partie fait appel à des notions de mécanique du premier semestre et la seconde au postulat de Boltzmann en physique statistique (transparent 11). Phénoménologiquement il a des connexions avec les deux expériences d'auditoires de mardi sur le mouvement Brownien.

Soit des petites billes (masse volumique ρ, rayon r) en suspension dans un liquide de densité ρ_L qui se déplacent à une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le liquide. Elles sont soumises à leur poids $\overrightarrow{P}$, la force d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$ et une force de frottement visqueux $\overrightarrow{F_f}$, μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.



$$\overrightarrow{F_f} = -6\pi\mu r\overrightarrow{v}$$

La vitesse moyenne des billes est la vitesse de sédimentation des billes.

$$\langle\overrightarrow{v}\rangle = v_{\text{sed}}\overrightarrow{u_x}$$

1. Ecrire le bilan des forces en régime stationnaire et en déduire la vitesse de sédimentation. Discuter le résultat selon le signe de $\rho - \rho_L$.
2. Un colloïde est une suspension stable de particules agitées par le mouvement Brownien. En comparant l'énergie cinétique moyenne de la particule $\langle E_{\text{sed}}\rangle$ et l'agitation thermique $\langle E_{\text{th}}\rangle$ des billes à la température T de l'expérience, écrire dans quel cas il y a sédimentation ou crémage [*] et dans quel cas un colloïde se forme.
3. En déduire le rayon maximal des billes pour avoir une suspension colloïdale en fonction de μ, k_B, T, g, ρ et ρ_L.

** Exercice 2 *Mesure du nombre d'Avogadro par Jean Perrin (Examen 2015)*

Problème d'examen. Ce jour là vous n'aurez pas d'indications à quels transparents du cours le problème fait référence.

En 1908 Jean Perrin [†] effectue une des premières mesures du nombre d'Avogadro, $\mathcal{N}_{\text{A}}$, en étudiant la distribution de très fines gouttelettes de gomme-gutte [‡] en suspension dans l'eau à la température T. Il trouva que le rapport, α, de la densité de particules dans des couches horizontales distantes verticalement de $h = 30\,\mu$m était $\alpha = 2{,}02$ (la densité de gouttelettes diminuant avec la hauteur).

∗. Sédimentation : dépôt en bas du récipient. Crémage : accumulation à la surface.

†. J. Perrin a obtenu le prix Nobel en 1926 pour ses travaux sur les mécanismes de sédimentation et sur le mouvement Brownien, qui confirmaient avec un excellent accord les prédictions théoriques de A. Einstein.

‡. La gomme-gutte est un pigment jaune orangé d'origine végétale. Elle est surtout utilisée en couleur à l'eau notamment pour des aquarelles, c'est le colorant qui est utilisé pour donner la couleur safran des robes des moines bouddhistes theravada. Les propriétés qui nous intéressent ici sont qu'elle peut former dans l'eau des émulsions de fines gouttelettes dont la masse volumique est très légèrement supérieure à celle de l'eau, de par sa couleur les gouttelettes sont aussi facilement discernables de l'eau environnante.

1. À l'équilibre (particule statique), quelles sont les forces qui s'exercent sur une gouttelette de rayon a (les deux fluides sont incompressibles) ? On notera ρ la masse volumique de la gomme-gutte, ρ_0 la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur.
2. En déduire l'énergie potentielle d'une gouttelette de gomme-gutte dans le champ de pesanteur terrestre.
3. Les gouttelettes sont aussi animées d'un mouvement autour de leur position moyenne. Écrire l'énergie mécanique totale moyenne d'une gouttelette à une hauteur z en fonction de sa vitesse quadratique moyenne $\langle v^2 \rangle$ et de l'expression obtenue en 2 de son énergie potentielle. Le terme en $\langle v^2 \rangle$ dépend-il de la hauteur h ? Justifiez.
4. En admettant que les particules sont distribuées dans le champ de pesanteur selon le postulat de Boltzmann, calculer $\mathcal{N}_\mathrm{A}$ (rappel : $R = \mathcal{N}_\mathrm{A} k_\mathrm{B}$, avec R la constante des gaz parfaits, $\mathcal{N}_\mathrm{A}$ le nombre d'Avogadro et k_B la constante de Boltzmann).

   AN : $\rho = 1{,}2097\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, $T = 20°\mathrm{C}$, $\rho_0 = 1{,}003\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, $a = 0{,}212\,\mu\mathrm{m}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $R = 8{,}314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$.

*** Exercice 3 *Tu quoque fili mi*

Cet exercice est essentiellement un exercice de probabilité. Il est destiné à prendre conscience de ce que cela signifie de travailler avec des ensembles de 10^{23} particules.

En expirant, Jules César a prononcé ses dernières paroles historiques et un litre d'air est sorti de ses poumons. Depuis cette époque, ces molécules se sont dispersées et uniformément réparties dans l'atmosphère.

Quelle est la probabilité d'inhaler au moins une de ces molécules en inspirant profondément (trois litres d'air) ?

Données : le nombre d'Avogadro est $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}022 \times 10^{23}\, mol^{-1}$, la masse molaire de l'air vaut $M_\mathrm{air} = 29 \times 10^{-3}\, kg/mol$ et la pression atmosphérique à la surface de la Terre vaut $P_0 = 10^5\, Pa$. La Terre est considérée comme une sphère parfaite de rayon $R = 6371\, km$.

** Exercice 4 *Distribution de Maxwell-Boltzmann*

Le but de cet exercice est de démontrer les résultats donnés au transparent 25

On considère 0,5 moles d'hydrogène à 300 K. En se basant sur la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann, calculer :

1. La vitesse moyenne.
2. La vitesse quadratique moyenne.
3. La vitesse la plus probable.
4. Le nombre de molécules avec une vitesse comprise entre 400 et $401\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rappel: $\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\, dx = \sqrt{\pi}/2$.