Énoncé *Centrale nucléaire (tiré de l'examen 2013)*

Une centrale nucléaire est installée le long d'un fleuve dont l'eau à la température T_f est utilisée comme source froide. La source chaude est constituée par le réacteur à la température T_c. La turbine de la centrale échange par cycle de durée τ les quantités de chaleur Q_c et Q_f avec les sources chaudes et froides et un travail W avec l'extérieur. On note $\dot{Q}_c = Q_c/\tau$ la quantité de chaleur moyenne échangée par unité de temps avec la source chaude et $\dot{Q}_f = Q_f/\tau$ avec la source froide.

1. Préciser les signes de $\dot{Q}_c$ et $\dot{Q}_f$. En supposant toutes les transformations réversibles, écrire les relations entre :
   (a) $\dot{Q}_c$, $\dot{Q}_f$ et la puissance P délivrée à l'extérieur par la centrale ($P = \dot{W}_{\text{ext}} = W_{\text{ext}}/\tau$).
   (b) T_c, T_f, $\dot{Q}_c$ et $\dot{Q}_f$.
   (c) Le rendement maximum possible η_m de la centrale en fonction de $\dot{Q}_c$ et $\dot{Q}_f$.
   (d) Le rendement maximum possible de la centrale en fonction de T_c et T_f.
2. En pratique le rendement réel η_r est plus faible que le rendement maximum, $\eta_r < \eta_m$, à cause de phénomènes irréversibles. Pour une même puissance P, la centrale échange une quantité de chaleur par unité de temps $\dot{Q}_c^r$ avec la source chaude et $\dot{Q}_f^r$ avec la source froide.
   (a) Exprimer η_r en fonction de $\dot{Q}_f^r$ et $\dot{Q}_c^r$.
   (b) Lesquelles des affirmations suivantes sont correctes ?
   $|\dot{Q}_c^r| < |\dot{Q}_c|$, $|\dot{Q}_c^r| = |\dot{Q}_c|$, $|\dot{Q}_c^r| > |\dot{Q}_c|$,
   $|\dot{Q}_f^r| < |\dot{Q}_f|$, $|\dot{Q}_f^r| = |\dot{Q}_f|$, $|\dot{Q}_f^r| > |\dot{Q}_f|$.
3. Le gouvernement du pays refuse de communiquer des informations sur la puissance de la centrale. Un citoyen ordinaire mesure la différence de température du fleuve entre l'amont et l'aval de la centrale, il trouve $T_f = 27°\text{C} = 300\,\text{K}$ et $\Delta T = T_{\text{aval}} - T_{\text{amont}} = 1{,}5\,\text{K}$. Selon un club de pêche local, le débit volumique du fleuve est $D = 400\,\text{m}^3/\text{s}$ (D est donc le volume d'eau qui s'écoule par unité de temps). Exprimer $\dot{Q}_f^r$ en fonction de ΔT, D, la capacité calorifique massique de l'eau C et la masse volumique de l'eau ρ.
4. Exprimer P en fonction de η_r et $\dot{Q}_f^r$. Par ailleurs, ce citoyen a trouvé que ce type de centrale fonctionne généralement avec $T_c = 900\,\text{K}$ et que le rendement de la turbine est de l'ordre de $\epsilon = 50\%$ du rendement maximum de Carnot, η_m. Quelle est la puissance de la centrale ? On donne $C = 4000\,\text{J}/(\text{K}\,\text{kg})$ et $\rho = 1000\,\text{kg}/\text{m}^3$.

Corrigé

1. La tubine est une machine thermique qui produit du travail à partir de la chaleur qu'elle reçoit de la source chaude. On a donc : $\dot{Q}_c > 0$ et $\dot{Q}_f < 0$.
   (a) Puisque la variation d'énergie interne de la turbine au cours d'un cycle est nulle, on doit avoir : $W + Q_c + Q_f = 0$, où $W < 0$ est le travail fourni par la turbine au cours d'un cycle. On en déduit :

$$P = \dot{W}_{\text{ext}} = \frac{W_{\text{ext}}}{\tau} = \frac{-W}{\tau} = \frac{Q_c + Q_f}{\tau} = \dot{Q}_c + \dot{Q}_f.$$

(b) $\dfrac{\dot{Q}_c}{T_c} + \dfrac{\dot{Q}_f}{T_f} = 0.$

(c) – (d) Le rendement maximum correspond au cas où la turbine se comporterait comme une machine idéale de Carnot :

$$\eta_m = \eta_{\text{Carnot}} = \frac{P}{\dot{Q}_c} = 1 + \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

2. (a) La définition du rendement ne change pas, elle correspond toujours au rapport de la quantité que l'on cherche à obtenir sur la quantité que l'on fournit à la machine :

$$\eta_r = \frac{P}{\dot{Q}_c^r} = 1 + \frac{\dot{Q}_f^r}{\dot{Q}_c^r},$$

où l'on a de nouveau utilisé le fait que la variation d'énergie interne de la turbine est nulle au cours d'un cycle.

(b) Pour une même puissance, la centrale réelle puise une plus grande quantité de chaleur dans la source chaude du fait de son rendement moindre, donc $|\dot{Q}_c^r| > |\dot{Q}_c|$. De l'entropie interne est également créée, la centrale rejette donc plus de chaleur dans la source froide : $|\dot{Q}_f^r| > |\dot{Q}_f|$.

3. La centrale rejette la quantité de chaleur $|Q_f| = |\dot{Q}_f|\tau$ dans la rivière pendant la durée τ. La masse d'eau m qui reçoit cette chaleur vaut : $m = \rho D\tau$. Sachant que sa température augmente de ΔT, on trouve :

$$mC\Delta T = |Q_f| \quad \Rightarrow \quad |\dot{Q}_f^r| = \rho CD\Delta T.$$

4. Par définition du rendement,

$$\eta_r = \frac{P}{\dot{Q}_c^r} = \frac{P}{P - \dot{Q}_f^r},$$

et donc

$$P = -\frac{\eta_r \dot{Q}_f^r}{1 - \eta_r}.$$

L'application numérique donne :

$$\eta_m = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{300}{900} = \frac{2}{3},$$

$$\eta_r = \epsilon\eta_m = 0{,}5 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\dot{Q}_f^r = -\rho CD\Delta T = -1000 \times 4000 \times 400 \times 1{,}5 = -2{,}4 \cdot 10^9\ \text{J} = -2{,}4\,\text{GJ}.$$

$$P = -\frac{\eta_r \dot{Q}_f^r}{1 - \eta_r} = \frac{\frac{1}{3} \times 2{,}4 \cdot 10^9}{1 - \frac{1}{3}} = 1{,}2 \cdot 10^9\ \text{W} = 1{,}2\,\text{GW}.$$