Solution

1. Non, la vitesse quadratique moyenne dépend de la masse de la particule.

$$\left\langle v_x^2 \right\rangle = 3\frac{k_B T}{m_x}$$

et

$$\frac{\left\langle v_{H_2}^2 \right\rangle}{\left\langle v_{O_2}^2 \right\rangle} = \frac{m_{O_2}}{m_{H_2}}$$

2. Pour un gaz parfait le rapport P/T à volume constant est constant et proportionnel au nombre de moles : $P/T = nR/V$. On voit (pas besoin d'une calculatrice) que ce rapport est constant jusqu'à $T \approx 3000K$ et ensuite croit pour arriver à une valeur double à $T \approx 5000K$, signe que la dissociation en oxygène atomique est complète.

T(K)	300	1000	2000	3000	4000	5000
P(10^5 Pa)	1	3.33	6.69	10.3	19.2	32.2
Valeur de P si $n = Cst$	1	3.33	6.67	10	$2 \times 6.67 = 13.34$	$5 \times 3.33 = 16.6$

3. $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r} = 0$ pour la vitesse de libération ($v = 0$ à l'infini).
Donc $v_l = \left(\frac{2GM_T}{R_T}\right)^{\frac{1}{2}}$. À la surface de la Terre $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ et donc $v_l = (2gR_T)^{\frac{1}{2}}$.

4. En combinant l'expression de $\left\langle v^2 \right\rangle$ (question 1) et celle de v_l (question 2) ainsi que la masse de la particule $m_X = M_X/N_A$, on trouve (après avoir remplacé $k_B N_A = R$) :

$$T_l = \frac{2}{3}\frac{M_X g R_T}{R}$$

$T_l(O_2) = 1.6 \times 10^5 K$, $T_l(O) = 8.2 \times 10^4 K$. À ces températures l'oxygène est complètement dissocié et c'est la valeur $T_l(O) = 8.2 \times 10^4 K$ qu'il faut retenir. $T_l(H_2) = 1 \times 10^4 K$, $T_l(H) = 5.1 \times 10^3 K$. Rq : seulement les ordres de grandeur suffisaient pour la réponse.

5.

$$5000K \leq T_f \leq 82000K$$

Température de formation de la Terre (Examen 2015)

1. Soit un gaz composé d'un mélange d'hydrogène et d'oxygène moléculaire, H_2 et O_2. Les gaz sont à une température T et considérés comme parfaits. Les lois de distribution des vitesses des molécules d'hydrogène et d'oxygène sont-elles identiques, en particulier les vitesses quadratiques moyennes des molécules d'hydrogène et d'oxygène sont-elles identiques ? Si non, de quoi dépend-il et exprimez le rapport des vitesses quadratique moyenne.

Oui/Non

$$\frac{\langle v_{H_2}^2 \rangle}{\langle v_{O_2}^2 \rangle} = \frac{m_{O_2}}{m_{H_2}} = 16$$

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

$$= \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3 k_B T}{m}$$

2. Le tableau ci-dessous donne la pression mesurée dans une enceinte de volume constant contenant de l'oxygène moléculaire, O_2, en fonction de la température.

T(K)	300	1000	2000	3000	4000	5000
P(10^5 Pa)	1	3.33	6.69	10.3	19.2	32.2
	1	3,33	6,67	10	13,3	16,7

double

P si n = cst

$\frac{1000}{300}$

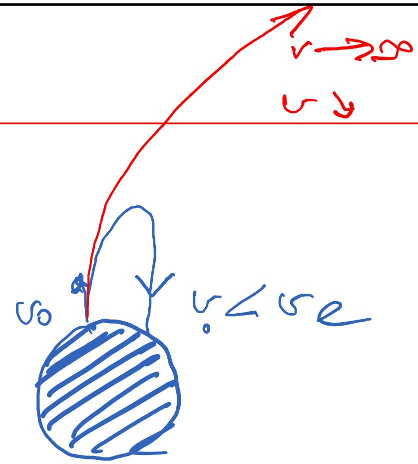
n = cst   n ↗   2n

Montrer que les molécules d'oxygène se dissocient en oxygène atomique ($O_2 \to 2O$) lorsque la température augmente. Qu'en est-il de cette dissociation notamment à 5000 K ?

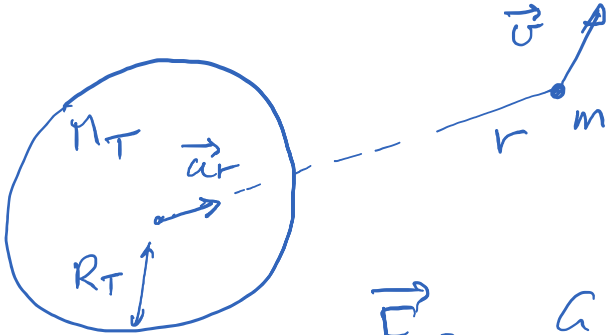
$V = cst \quad PV = nRT \quad \Rightarrow \quad P(T) = \frac{T}{T_0} P(T_0)$ si $n = cst$ $(T_0 = 300K)$

si n varie $\quad P(T) = \frac{n}{n_0} \frac{T}{T_0} P(T_0)$

3. Rappeler l'expression de la vitesse de libération d'un corps soumis à l'attraction gravitationnelle d'une planète. Donner son expression en fonction de l'accélération de la pesanteur à la surface, g, et le rayon de la planète, R_T. *Suggestion* : écrire la conservation de l'énergie mécanique (c'est à dire la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation) entre la particule à la surface de la Terre et à l'infini.



$$v_l = \sqrt{2 g R_T}$$



$$E_T = E_c + E_p$$

$$E_c = -\frac{1}{2} m v^2$$

$$E_p = -\frac{G M_T m}{r}$$

$$\vec{F} = -\frac{G M_T m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} E_p \\ \frac{d}{dy} E_p \\ \frac{d}{dz} E_p \end{pmatrix}$$

ici en coordonnées sphériques + symétrie radiale

$$F = -\frac{G M_T m}{r^2} = -\frac{d E_p(r)}{dr} \Rightarrow E_p = -\frac{G M_T m}{r}$$

$$E_T = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{r} = cst$$

le cas limite pour $v_0 = v_e$

est quand $r \to \infty$

et $v \to 0$

donc $E_T = 0$

À la surface de la terre

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G M_T m}{R_T} = 0 \Rightarrow v_e^2 = \frac{2 G M_T}{R_T}$$

le poids $\vec{P}$ s'écrit $\vec{P} = -\frac{G M_T m}{R_T^2} \vec{u}_r$

donc $g = \frac{G M_T}{R_T^2}$

$$\Rightarrow v_e^2 = 2 g R_T$$

indépendant de m

4. Quelle température devrait atteindre l'atmosphère terrestre pour que la vitesse quadratique moyenne de l'oxygène atteigne la vitesse de libération, T_l ? Selon la valeur trouvée faut il considérer une atmosphère constituée d'oxygène moléculaire, O_2 , ou bien d'oxygène atomique, O. Même question pour l'hydrogène. Donnez l'expression de T_l en fonction de la masse molaire, M, g, R_T et la constante des gaz parfaits, R (rappel $R = k_B N_A$, avec N_A le nombre d'Avogadro et k_B la constante de Boltzmann).

$$T_l = \frac{2}{3} \frac{M g R_T}{R}$$

En regroupant les Q1 et 3

$$v_e^2 = 2 g R_T = \frac{3 k_B T_e}{m} \Rightarrow T_e = \frac{2}{3} \frac{m g R_T}{k_B}$$

or $R = k_B N_A$

$$\Rightarrow T_e = \frac{2}{3} \frac{m N_A g R_T}{R} = \underline{\frac{2}{3} \frac{M g R_T}{R}}$$

EPFL

4. Quelle température devrait atteindre l'atmosphère terrestre pour que la vitesse quadratique moyenne de l'oxygène atteigne la vitesse de libération, T_l ? Selon la valeur trouvée faut il considérer une atmosphère constituée d'oxygène moléculaire, O_2 , ou bien d'oxygène atomique, O. Même question pour l'hydrogène. Donnez l'expression de T_l en fonction de la masse molaire, M, g, R_T et la constante des gaz parfaits, R (rappel $R = k_B N_A$, avec N_A le nombre d'Avogadro et k_B la constante de Boltzmann).

$$T_l = \frac{2}{3} \frac{M g R_T}{R}$$

AN : $R = 8Jmol^{-1}K^{-1}$, $g = 10ms^{-2}$, $M_O = 16gmol^{-1}$,$M_H = 1gmol^{-1}$,
$R_T = 6400km$ (donnez l'ordre de grandeur uniquement)

$T_l(O_2) =$ 1,6 10^5 K

$\boxed{T_l(O) = 8{,}2\ 10^4\ K}$

$T_l(H_2) =$ 1.10^4 K

$\boxed{T_l(H) = 5.10^3\ K}$

> 5000 K donc O_2 est dissocié

$\Rightarrow T_f < 82000\ K$

$T_f > 5000\ K$

5. L'hydrogène est un gaz très rare sur Terre. Sachant que la terre n'a donc pas gardé son atmosphère d'hydrogène lors de la formation mais a conservé son oxygène en déduire un encadrement de la température, T_f, de la Terre lors de sa formation, on supposera l'hydrogène complètement dissocié à cette température.

$$5000\ \mathrm{K} \leq T_f \leq 82\,000\ \mathrm{K}$$