

Exercice 1 *Plaque de combustible nucléaire*

On considère une plaque rectangulaire d'épaisseur l et d'aire \mathcal{A} parfaitement isolée sur ses faces. La plaque est maintenue à la température T_0 sur ses deux faces.

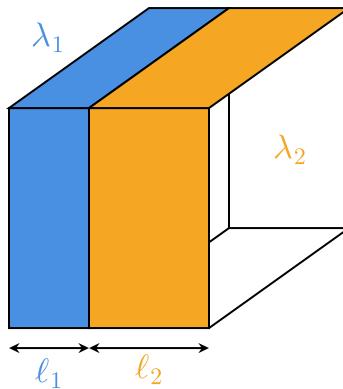
La réaction nucléaire est à l'origine d'un dégagement d'énergie dont la puissance volumique p_Q est connue.

Etablir le profil de température dans la plaque en régime stationnaire.

Exercice 2 *Isolation thermique*

On cherche à évaluer les pertes thermiques à travers une baie vitrée d'aire $\mathcal{A} = 2 \text{ m}^2$. La température à l'intérieur est $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$ et celle à l'extérieur $T_{\text{ext}} = 0^\circ\text{C}$. On donne $\lambda_{\text{verre}} = 1 \text{ W}/(\text{m K})$ et $\lambda_{\text{air}} = 0,024 \text{ W}/(\text{m K})$.

1. La vitre est du simple vitrage d'épaisseur $\ell = 5 \text{ mm}$. Calculer le profil de température à travers la vitre ainsi que la puissance du radiateur nécessaire pour maintenir la température dans la pièce.
2. On veut remplacer la vitre par un double vitrage. On considère d'une manière générale deux matériaux de conductivités λ_1 et λ_2 et d'épaisseurs ℓ_1 et ℓ_2 . On appelle $R_i = \frac{\ell_i}{\lambda_i}$ la résistance thermique du matériau i .



- (a) Montrer que pour deux matériaux en série, de résistances R_1 et R_2 , la résistance totale est $R = R_1 + R_2$.
- (b) Exprimer la puissance thermique P_Q traversant la baie vitrée en fonction de T_{ext} , T_{int} , R et \mathcal{A} . L'évaluer P_Q pour du double vitrage. On prendra deux vitres de 4 mm et une couche d'air de 16 mm.

Exercice 3 *Petite incursion dans la symétrie cylindrique*

On considère un fil chauffant de rayon r_0 entouré de matériau isolant de conductivité thermique λ , formant un fil plus épais de rayon r_1 . La puissance dégagée par unité de longueur de fil est P_ℓ . La température extérieure est T_{ext} . On considère que la conductivité du matériau du fil est parfaite, et que donc sa température est homogène. Quelle est l'expression de la température en fonction du rayon dans le matériau isolant ? Quelle est la température à l'interface entre le fil et le matériau isolant ?

Exercice 4 *Onde de chaleur*

On s'intéresse à la variation de la température dans le sol lorsque la température de surface oscille de façon périodique, comme c'est par exemple le cas lors d'une journée ensoleillée. C'est un problème similaire à celui du barreau chauffé de manière périodique, vu en amphi.

- Résoudre l'équation de diffusion de la chaleur dans le sol en prenant l'axe vertical z orienté vers le bas. On notera $\kappa = \lambda/(c^*\rho)$ le coefficient de diffusion de la chaleur et $T(z, t)$ la température dans le sol à la profondeur z et au temps t . On supposera que $T(0, t)$ est connu et vaut

$$T(0, t) = \bar{T} + A \cos(\omega t),$$

avec \bar{T} la température moyenne de la surface, A l'amplitude des oscillations et ω la pulsation des oscillations. On posera $\delta = \sqrt{2\kappa/\omega}$. On supposera que la température en z a la forme

$$T(z, t) = \bar{T} + a(z) \cos(\omega t + \varphi(z)).$$

Indication : réécrire l'équation de diffusion de la chaleur en fonction de $\theta = T - \bar{T}$, qui représente l'écart entre la température du sol et la température moyenne à la surface. Chercher une solution complexe du type $\tilde{\theta}(z, t) = a(z) \exp(i\varphi(z)) \exp(i\omega t) = \tilde{a}(z) \exp(i\omega t)$.

- Une de vos connaissances souhaite ouvrir un restaurant. À quelle profondeur sous le sol doit-elle faire creuser sa cave pour assurer une température plus ou moins constante tout au long de l'année, et ainsi assurer une bonne conservation de son vin ?

Données : prendre $A = 30$ °C pour l'amplitude des fluctuations annuelles de la température à la surface du sol, et $\kappa = 2,8 \times 10^{-7}$ m²/s pour le coefficient de diffusion thermique dans le sol.

Exercice 5 Effusivité

La sensation de chaud que l'on perçoit n'est pas la même lorsque l'on touche des matériaux différents qui sont à la même température. Par exemple, on se brûle la main en touchant une plaque métallique à 100 °C, alors qu'on supporte une pince en bois à la même température. On va chercher à comprendre ce phénomène dans cet exercice.

- On met en contact deux corps à des températures différentes T_1 et T_2 , avec $T_2 > T_1$. Une fois le régime permanent établi, la température à l'interface entre ces deux corps se stabilise à une valeur intermédiaire entre T_1 et T_2 , que l'on nomme « température de contact » et que l'on note T_c . Calculer T_c en fonction de T_1 et T_2 .

Suggestion : Utiliser le résultat de l'exercice précédent avec $\omega \rightarrow 0$. On notera λ_1 et λ_2 les conductivités thermiques des deux corps.

- Calculer la température de contact entre une main et un morceau de bois à 100 °C. Comparer avec le cas où le bois est remplacé par un morceau d'acier à 100 °C.

Données : On approximera les propriétés thermiques de la peau par celles de l'eau, à savoir une conductivité thermique $\lambda_{\text{peau}} = 0,6$ W/(m K) et une diffusivité thermique $\kappa_{\text{eau}} = 1,4 \times 10^{-7}$ m²/s. On prendra également $\lambda_{\text{bois}} = 0,12$ W/(m K), $\kappa_{\text{bois}} = 0,12 \times 10^{-6}$ m²/s, $\lambda_{\text{acier}} = 50,2$ W/(m K) et $\kappa_{\text{acier}} = 39,4 \times 10^{-6}$ m²/s.

Solutions

Solution 1 Comme pour la fenêtre vue en amphi, c'est un problème à une dimension à cause de l'isolation des faces latérales. de plus, régime stationnaire : $T = T(x)$.
 Équation de propagation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 = \frac{\lambda}{c^* \rho} \nabla^2 T + \frac{\sigma_u}{c^* \rho}$$

$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dx^2}$$

$$\sigma_u = P_Q$$

$$\frac{\lambda}{c^* \rho} \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{P_Q}{c^* \rho}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{P_Q}{\lambda} = \text{cte}$$

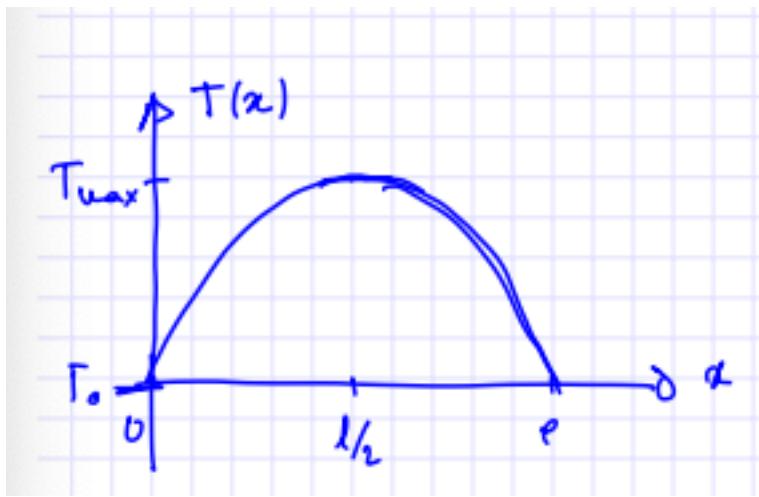
$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{P_Q}{\lambda} x^2 + ax + b$$

Avec a et b constantes d'intégrations $T(x=0) = T_0$ donc $b = T_0$.

$T(x=l) = T_0$ donne $a = \frac{P_Q l}{2\lambda}$

Donc au final

$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{P_Q}{\lambda} x^2 + \frac{1}{2} \frac{P_Q}{\lambda} l x + T_0$$



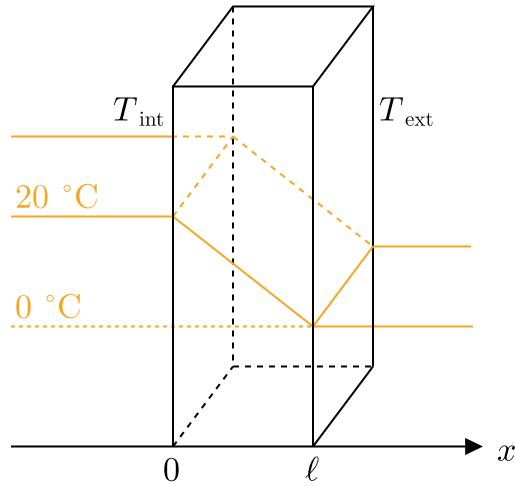
Solution 2

1. L'équation de la chaleur est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c^* \rho} \nabla^2 T,$$

où λ est la conductivité thermique, c^* la capacité thermique et ρ la masse volumique.
 En régime permanent, on a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \implies \nabla^2 T = 0,$$



donc

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

La symétrie du problème fait que T ne dépend que de x , on a donc seulement $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, que l'on peut intégrer deux fois :

$$T(x) = ax + b,$$

avec a et b des constantes déterminées par les conditions au bord :

$$\begin{aligned} T(0) &= T_{\text{int}} \implies b = T_{\text{int}}, \\ T(\ell) &= a\ell + T_{\text{int}} = T_{\text{ext}} \implies a = -\frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\ell}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$T(x) = -\frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\ell}x + T_{\text{int}},$$

que l'on peut aisément tracer sur la figure ci-dessus. On cherche la puissance thermique dissipée à travers la vitre. D'après la loi de Fourier, la densité de flux de chaleur est liée à la température par

$$\mathbf{j}_u = -\lambda \nabla T,$$

qui, à une dimension, se réduit à

$$j_{ux} = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \left(-\frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\ell} \right) = \frac{\lambda}{\ell} (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}).$$

Or, par définition,

$$j_{ux} = \frac{dU}{\mathcal{A} dt} = \frac{\delta Q}{\mathcal{A} dt},$$

donc

$$P_Q = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\lambda \mathcal{A}}{\ell} (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}).$$

Avec $\lambda = 1 \text{ W}/(\text{m K})$, $\mathcal{A} = 2 \text{ m}^2$, $\ell = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ et $T_{\text{int}} - T_{\text{ext}} = 20 \text{ K}$, on obtient

$$P_Q = \frac{1 \times 2 \times 20}{5 \times 10^{-3}} = \frac{40}{5} \times 10^3 = 8 \text{ kW}.$$

2. (a) La puissance thermique est identique tout au long de x car on est en régime permanent. Pour une différence de température ΔT et une résistance thermique R , elle vaut

$$P_Q = \frac{\lambda}{\ell} \mathcal{A} \Delta T = \frac{1}{R} \mathcal{A} \Delta T$$

Considérons deux matériaux 1 et 2 en série et appelons T_i température de l'interface entre les deux. On a à travers le matériau 1 et le matériau 2 respectivement :

$$P_Q = \frac{1}{R_1} \mathcal{A} (T_{\text{int}} - T_i) \quad \text{et} \quad P_Q = \frac{1}{R_2} \mathcal{A} (T_i - T_{\text{ext}}),$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{P_Q R_1}{\mathcal{A}} = T_{\text{int}} - T_i \quad \text{et} \quad \frac{P_Q R_2}{\mathcal{A}} = T_i - T_{\text{ext}}.$$

En sommant les deux, on aboutit à

$$P_Q = \frac{1}{R_1 + R_2} \mathcal{A} (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}),$$

et par identification on obtient finalement

$$R = R_1 + R_2.$$

- (b) On a trois résistances thermiques en série, la résistance totale est la somme :

$$R_{\text{tot}} = 2 \frac{\ell_{\text{vitre}}}{\lambda_{\text{vitre}}} + \frac{\ell_{\text{air}}}{\lambda_{\text{air}}}.$$

L'application numérique donne

$$R_{\text{tot}} = \left(2 \times \frac{4}{1} + \frac{16}{0,024} \right) \times 10^{-3} = 0,675 \text{ K m}^2/\text{W},$$

et la puissance thermique est donc

$$P_Q = \frac{\mathcal{A} \Delta T}{R_{\text{tot}}} = \frac{2 \times 20}{0,675} = 59 \text{ W}.$$

Remarque : les constructeurs donnent le coefficient de transmission thermique U qui est l'inverse de la résistance thermique $U = 1/R$ en $\text{W}/(\text{K}^{-1} \text{ m}^{-2})$. Un double vitrage classique a un U de 1,1 là où on a calculé 1,5 : l'ordre de grandeur est bon.

Solution 3

Pendant dt , une longueur ℓ de fil produit $\delta Q = P_\ell \ell dt$. Cette chaleur doit être transférée vers l'extérieur. En régime permanent, le flux est constant pour chaque couche cylindrique. Entre r et $r + dr$ on a :

$$P = \frac{\delta Q}{dt} = -\lambda \mathcal{A} \frac{dT}{dr} = -\lambda 2\pi r \ell \frac{dT}{dr},$$

donc

$$P_\ell \ell = -2\lambda\pi r \ell \frac{dT}{dr},$$

soit

$$dT = -\frac{P_\ell}{2\pi\lambda} \frac{dr}{r}.$$

En intégrant de r_1 à r , il vient

$$T(r) - T(r_1) = -\frac{P_\ell}{2\pi\lambda} \ln \frac{r}{r_1},$$

soit donc finalement

$$T(r) = T_0 + \frac{P_\ell}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_1}{r}.$$

En particulier, la température à l'interface est $T_i = T(r_0)$, donc

$$T_i = T_0 + \frac{P_\ell}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_1}{r_0}.$$

Solution 4

1. L'équation de diffusion de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

En posant $\theta = T - \bar{T}$ comme suggéré dans l'énoncé, on peut réécrire cette équation comme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

avec la condition au bord suivante :

$$\theta(0, t) = A \cos(\omega t). \quad (2)$$

On cherche une solution complexe de l'équation (1) de la forme $\tilde{\theta}(z, t) = \tilde{a}(z) \exp(i\omega t)$. En injectant cette expression dans (1), on trouve :

$$\frac{d^2 \tilde{a}}{dz^2} - \frac{i\omega}{\kappa} \tilde{a} = 0. \quad (3)$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique dont la pulsation (complexe) r est définie par

$$r^2 = \frac{i\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\kappa} \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right],$$

avec n nombre entier quelconque. On trouve r avec :

$$r = (r^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) \right].$$

Pour $n = 0$, on obtient :

$$r_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Si l'on choisit $n = 1$, on trouve :

$$r_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \exp\left(i \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right] = -\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Pour n'importe quel autre choix de n , on trouve soit la même solution que pour $n = 0$ si n est pair, soit la même solution que pour $n = 1$ si n est impair. La solution de l'équation (3) est donc de la forme :

$$\tilde{a}(z) = \alpha \exp(r_0 z) + \beta \exp(r_1 z),$$

avec α et β constantes à déterminer. En introduisant $\delta = \sqrt{2\kappa/\omega}$, la solution générale de l'équation (1) s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(z, t) &= \alpha \exp(r_0 z + i\omega t) + \beta \exp(r_1 z + i\omega t) \\ &= \alpha \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\frac{z}{\delta} + \omega t\right)\right] + \beta \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(-\frac{z}{\delta} + \omega t\right)\right]. \end{aligned}$$

Comme l'amplitude des fluctuations ne peut pas tendre vers l'infini pour $z \rightarrow +\infty$, on doit forcément avoir $\alpha = 0$. De plus, la température étant une grandeur réelle, il nous faut garder uniquement la partie réelle de l'expression ci-dessus pour obtenir la solution :

$$\theta(z, t) = \Re[\tilde{\theta}(z, t)] = \beta \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(-\frac{z}{\delta} + \omega t\right).$$

La constante β peut être obtenue en utilisant la condition au bord (2) ; on trouve simplement $\beta = A$. Finalement, la solution de l'équation de diffusion de la chaleur est :

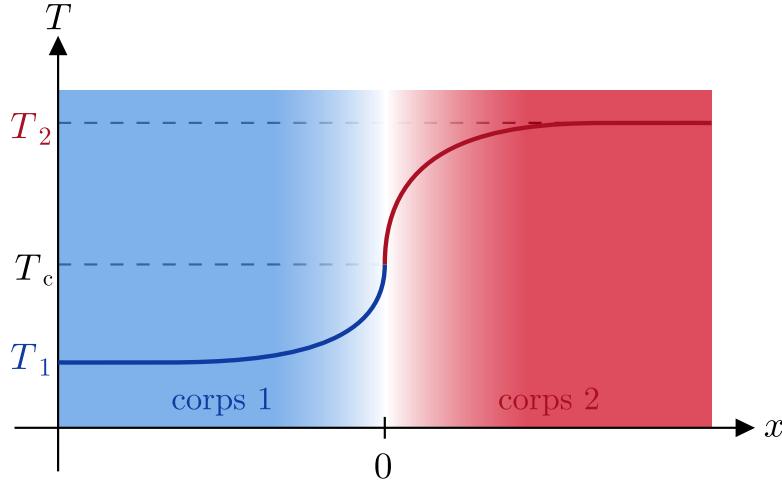
$$T(z, t) = \bar{T} + A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(-\frac{z}{\delta} + \omega t\right).$$

On voit que l'amplitude des fluctuations décroît exponentiellement avec la profondeur. δ correspond à la profondeur caractéristique de décroissance à laquelle les fluctuations n'ont plus qu'une amplitude égale à 37% de leur valeur à la surface.

2. La température à la surface du sol varie de façon quasi-sinusoidale au cours de l'année. Sa période de fluctuation correspond à 365 jours, soit une pulsation de $2\pi/(365 \times 24 \times 3600) = 2 \times 10^{-7}$ rad/s. La profondeur caractéristique associée vaut ainsi : $\delta \approx 1,7$ m. À une profondeur de 2 m, l'amplitude annuelle dans la cave sera de $\sim 30\%$ de l'amplitude annuelle extérieure. De manière plus importante, les variations quotidiennes disparaîtront complètement, puisque la longueur caractéristique pour une pulsation correspondant à une période de 24 heures est de $\sim 8,8$ cm. Cela donne une atténuation d'un facteur de $\sim 10^{10}$ à deux mètres !

Solution 5

1. À partir de l'instant initial où les deux corps sont mis en contact, il y a diffusion thermique du corps 2 à la température T_2 vers le corps 1 à la température T_1 . Après une période de transition, le régime permanent est atteint et les températures dans les deux corps ne varient plus dans le temps. On se retrouve dans le cas schématisé ci-dessous. La température dans le corps 2 vaut T_2 loin de l'interface (*i.e.* pour $x \gg 0$) et tend vers T_c lorsque $x \rightarrow 0$. De même, la température dans le corps 1 passe de T_1 pour $x \ll 0$ à



T_c pour $x \rightarrow 0$. Il s'agit d'un cas identique à celui traité dans l'exercice 3, où chacun des deux corps correspondrait au sol, et T_c à la température de surface. Cependant, T_c est constant dans le cas présent, ce qui correspond à une période d'oscillation infinie, c'est-à-dire $\omega = 0$. Par la suite, on ne va pas considérer le cas limite $\omega = 0$, mais plutôt $\omega \rightarrow 0$, sans quoi $\delta = \sqrt{2\kappa/\omega} \rightarrow +\infty$. En reprenant la solution de l'exercice 3, avec $A = T_c - T_1$ dans le corps 1 et $A = T_c - T_2$ dans le corps 2, on trouve que les profils de température dans les deux corps sont :

$$T^{(1)}(x) = T_1 + (T_c - T_1) \exp\left(\frac{x}{\delta_1}\right) \cos\left(-\frac{x}{\delta_1} + \omega t\right), \quad (4)$$

$$T^{(2)}(x) = T_2 + (T_c - T_2) \exp\left(-\frac{x}{\delta_2}\right) \cos\left(\frac{x}{\delta_2} + \omega t\right), \quad (5)$$

avec $\omega \rightarrow 0$. Le corps 2 correspond exactement au cas de figure traité à l'exercice 3 de la série 14, puisque x croît lorsque l'on s'enfonce dans le corps. L'inverse est vrai pour le corps 1, ce qui explique que l'on a remplacé x par $-x$ dans l'expression de $T^{(1)}$. On a également distingué δ_1 de δ_2 , puisque la conductivité thermique des deux corps n'est pas la même. Pour trouver T_c , on utilise le fait que le flux thermique au niveau de l'interface est le même dans les deux matériaux :

$$J_{U,1}(0) = J_{U,2}(0) \implies -\lambda_1 \frac{dT^{(1)}}{dx} \Big|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{dT^{(2)}}{dx} \Big|_{x=0}.$$

En utilisant les expressions (4) et (5) pour $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\delta_1} (T_c - T_1) [\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] &= -\frac{\lambda_2}{\delta_2} (T_c - T_2) [\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] \\ \implies \frac{\lambda_1}{\sqrt{\kappa_1}} (T_c - T_1) [\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] &= -\frac{\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}} (T_c - T_2) [\cos(\omega t) + \sin(\omega t)], \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations $\delta_1 = \sqrt{2\kappa_1/\omega}$ et $\delta_2 = \sqrt{2\kappa_2/\omega}$ dans la deuxième étape. N'ayant plus de facteur ω au dénominateur d'une fraction, on peut à présent prendre

la limite $\omega \rightarrow 0$. On a alors : $\cos(\omega t) \rightarrow 1$ et $\sin(\omega t) \rightarrow 0$, et donc :

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{\kappa_1}}(T_c - T_1) = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{\kappa_2}}(T_c - T_2).$$

On est conduit à introduire l'*effusivité thermique* $E = \lambda/\sqrt{\kappa} = \sqrt{\lambda c^* \rho}$, ce qui donne :

$$E_1(T_c - T_1) = -E_2(T_c - T_2) \implies T_c = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}.$$

Ainsi, la température de contact est la moyenne des températures des deux matériaux, pondérées par leurs effusivités et *non* leurs conductivités thermiques.

2. Avec les données de l'énoncé, on peut calculer les effusivités des différents matériaux :

$$\begin{aligned} E_{\text{peau}} &= \frac{\lambda_{\text{peau}}}{\sqrt{\kappa_{\text{peau}}}} \approx 1,6 \times 10^3 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K s}^{1/2}), \\ E_{\text{bois}} &= \frac{\lambda_{\text{bois}}}{\sqrt{\kappa_{\text{bois}}}} \approx 343 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K s}^{1/2}), \\ E_{\text{acier}} &= \frac{\lambda_{\text{acier}}}{\sqrt{\kappa_{\text{acier}}}} \approx 8 \times 10^3 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K s}^{1/2}). \end{aligned}$$

Dans le cas du toucher d'une pièce de bois à $T_2 = 100^\circ\text{C} = 373\text{ K}$, la température de contact vaut :

$$T_c = \frac{1,6 \times 10^3 \times 310 + 343 \times 373}{1,6 \times 10^3 + 343} = 324\text{ K}, \quad \text{soit } 48^\circ\text{C},$$

si la main est supposée à $310\text{ K} (= 37^\circ\text{C})$. En revanche, si le corps touché est une plaque en acier inox, cette température vaut :

$$T_c = \frac{1,6 \times 10^3 \times 310 + 8 \times 10^3 \times 373}{1,6 \times 10^3 + 8 \times 10^3} = 363\text{ K}, \quad \text{soit } 90^\circ\text{C},$$

d'où la sensation de chaud dans ce dernier cas.