

**Exercice 1** *Mesure du nombre d'Avogadro par Jean Perrin*

En 1908 Jean Perrin<sup>1</sup> effectue une des premières mesures du nombre d'Avogadro,  $\mathcal{N}_A$ , en étudiant la distribution de très fines gouttelettes de gomme-gutte<sup>2</sup> en suspension dans l'eau à la température  $T$ . Il trouva que le rapport  $\alpha$  de la densité de particules dans des couches horizontales distantes verticalement de  $h = 30 \mu\text{m}$  était  $\alpha = 2,02$  (la densité de gouttelettes diminuant avec la hauteur).

1. À l'équilibre (particule statique), quelles sont les forces qui s'exercent sur une gouttelette de rayon  $a$  (les deux fluides sont incompressibles) ? On notera  $\rho$  la masse volumique de la gomme-gutte,  $\rho_0$  la masse volumique de l'eau et  $g$  l'accélération de la pesanteur.
2. En déduire l'énergie potentielle d'une gouttelette de gomme-gutte dans le champ de pesanteur terrestre.
3. Les gouttelettes sont aussi animées d'un mouvement autour de leur position moyenne. Écrire l'énergie mécanique totale moyenne d'une gouttelette à une hauteur  $z$  en fonction de sa vitesse quadratique moyenne  $\langle v^2 \rangle$  et de l'expression obtenue en 2. de son énergie potentielle. Le terme en  $\langle v^2 \rangle$  dépend-il de la hauteur  $h$  ? Justifier.
4. En admettant que les particules sont distribuées dans le champ de pesanteur selon la loi de Boltzmann, calculer  $\mathcal{N}_A$  (rappel :  $R = \mathcal{N}_A k_B$ , avec  $R$  la constante des gaz parfaits,  $\mathcal{N}_A$  le nombre d'Avogadro et  $k_B$  la constante de Boltzmann).

*Données* :  $\rho = 1,209 \text{ g/cm}^3$ ,  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\rho_0 = 1,003 \text{ g/cm}^3$ ,  $a = 0,212 \mu\text{m}$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $R = 8,314 \text{ J/(K mol)}$ , on donne aussi  $\ln(2,02) = 0,703$ .

**Exercice 2** *Profil de température dans l'atmosphère, approche statistique*

On considère un modèle isotherme d'atmosphère, et l'air sera pris comme un gaz parfait diatomique. Établir l'expression de la pression en fonction de l'altitude pour un axe orienté vers le haut et une pression en  $z = 0$  valant  $p_0$ . Comparer le résultat avec celui obtenu dans l'exercice 3 de la série 5.

*Indication* : le calcul prend cinq lignes. ;-)

**Exercice 3** *Émission d'électrons par un métal chauffé*

Dans de nombreuses expériences ou instruments on utilise un filament de tungstène chauffé afin d'extraire des électrons (par exemple pour certains microscopes électroniques ou dans les expériences où on observe la trajectoire d'électrons dans un champ magnétique ou électrique). On suppose que la distribution de vitesse des électrons de conduction (électrons libres de se déplacer dans le métal, par opposition aux électrons des couches profondes qui sont fortement liés aux noyaux) suit une statistique de Boltzmann.

$$dn_x(v_x) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) dv_x,$$

où  $n$  est nombre d'électrons par unité de volume et  $m$  la masse des électrons.

On considérera une géométrie à une dimension, une plaque de tungstène perpendiculaire à l'axe ( $Ox$ ) et chauffée à  $T$ .

---

1. J. Perrin a obtenu le prix Nobel en 1926 pour ses travaux sur les mécanismes de sédimentation et sur le mouvement brownien, qui confirmaient avec un excellent accord les prédictions théoriques de A. Einstein.

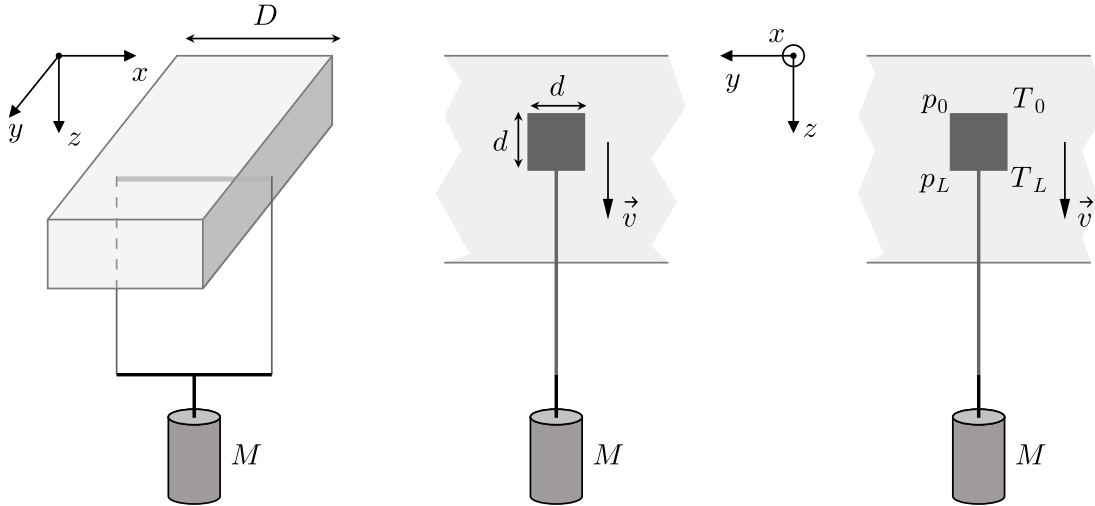
2. La gomme-gutte est un pigment jaune orangé d'origine végétale. Elle est surtout utilisée en couleur à l'eau notamment pour des aquarelles, c'est le colorant qui est utilisé pour donner la couleur safran des robes des moines bouddhistes theravāda. Les propriétés qui nous intéressent ici sont qu'elle peut former dans l'eau des émulsions de fines gouttelettes dont la masse volumique est très légèrement supérieure à celle de l'eau, de par sa couleur les gouttelettes sont aussi facilement discernables de l'eau environnante.

1. Un électron doit avoir une énergie au moins égale à  $W$ , énergie d'extraction, pour pouvoir sortir du métal. Exprimer la vitesse minimale que doit avoir un électron pour sortir.
2. Calculer le nombre d'électrons émis par unité de temps dans la direction  $x$  à la vitesse  $v_x$  à travers une aire  $\mathcal{A}$ .
3. Calculer le nombre total d'électrons émis par unité d'aire et de temps.

**Exercice 4** *Le fil à travers la glace (format examen)*

Une expérience vue en cours consiste à faire traverser un fil à travers un bloc de glace sous l'effet d'un poids, le bloc de glace restant en un seul morceau.

Ce phénomène s'explique de la façon suivante : à l'instant  $t$ , la pression exercée par le fil change localement la température de fusion de la glace sous le fil qui peut devenir **inférieure à 0 °C**. La glace peut alors fondre sous le fil. L'eau ainsi formée passe au-dessus du fil par les côtés, ce qui conduit à un déplacement du fil vers le bas. L'eau n'étant plus comprimée en haut du fil, elle gèle de nouveau. La chaleur latente de solidification est conduite à travers le fil ce qui entraîne la fusion de la glace sous le fil. Le processus recommence à  $t + dt$ , et ainsi de suite... le fil descend.



Notations de l'énoncé et rappels :

- $M$  est la masse du poids accroché au fil (le fil a une masse négligeable devant  $M$ ) ;
- le fil est de section carrée et de côtés  $d$ . Sa conductivité thermique est  $\lambda$  ;
- le fil traverse le bloc de glace sur une largeur  $D$  ;
- la pression exercée par le fil sur la glace est homogène sur toute la longueur  $D$  du fil ;
- la vitesse  $\vec{v}$  de déplacement du fil est constante ;
- la fusion locale de l'eau à la base du fil a lieu à la température  $T_L$  et à la pression  $p_L$  ;
- la solidification de l'eau en haut du fil a lieu à la température  $T_0$  et à la pression  $p_0$  ;
- le courant thermique à travers le fil est  $I_{th}$  ;
- la formule de Clapeyron pour une transition de phase de solide à liquide est

$$\ell_{f, m}^* = T(v_\ell - v_s) \frac{dp}{dT},$$

- avec  $\ell_{f,m}^*$  la chaleur latente massique de fusion,  $T$  la température,  $v_\ell$  et  $v_s$  les volumes massiques pour les phases liquide et solide, et  $p(T)$  la courbe définissant l'équilibre liquide/solide — on notera que  $v_\ell - v_s$  est une constante et  $v_\ell < v_s$  pour l'eau ;
- $\rho_s = 1/v_s$  est la masse volumique de la glace et  $\rho_\ell = 1/v_\ell$  celle de l'eau ;
  - $g$  est l'accélération de la pesanteur.
1. Tracer de façon schématique le diagramme de phase  $p(T)$  de l'eau.
  2. Le fil exerçant une pression sur la glace, placer les points  $(T_L, p_L)$  et  $(T_0, p_0)$  sur le diagramme précédent. Comparer  $T_L$  et  $T_0$ .
  3. Quelle est la direction du courant thermique  $I_{th}$  à travers le fil (du haut vers le bas, ou du bas vers le haut) ?
  4. Exprimer le courant thermique  $I_{th}$  en fonction de  $D$ ,  $\lambda$ ,  $T_L$  et  $T_0$ .
  5. Calculer la différence de pression  $\Delta p = p_L - p_0$  en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $D$  et  $d$ . On rappelle que la vitesse de déplacement est constante.
  6. Quelle est la quantité de chaleur élémentaire  $\delta Q$  nécessaire pour la fusion de la glace pour un déplacement élémentaire  $dz$  du fil dans la glace ?
  7. Donnez une expression de la vitesse  $v$  en fonction de  $\lambda$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $v_\ell$ ,  $v_s$ ,  $M$ ,  $T_L$ ,  $g$ ,  $\rho_s$  et  $\ell_{f,m}^*$ .