IX - Transport

Prof. Cécile Hébert

2 mai 2025

Plan du cours

1. Introduction, motivation

2. Outils mathématiques

gradient

divergence

Théorème de la divergence

Pour un champ scalaire $F(\vec{r}) = F(x, y, z)$ le gradient de F, $\vec{\nabla} F$ est le vecteur :

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{e}_z$$

Champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{e}_x + F_y(x, y, z)\vec{e}_y + F_z(x, y, z)\vec{e}_z$. La divergence de $\vec{F}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ est le scalaire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Théorème de la divergence. Pour un volume V entouré par une surface S et un champ vectoriel $\vec{F}$, $\Phi_{\vec{F}}$ flux de $\vec{F}$ à travers S :

$$\Phi_{\vec{F}} = \oint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

3. Equation de continuité

Grandeurs densitaires

Densité de courant à travers une surface

Equation de continuité sans convection

Résumé

Soit F une grandeur extensive scalaire.

$$F(t) = \int_V f(\vec{r}, t) dV$$

En l'absence de convection, le centre de masse de chaque élément de volume est immoblie dans le référentiel, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sigma_f(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f(\vec{r}, t)$$

Cas particuliers

4. Taux de production d'entropie

5. Loi de Fourier

Différentes formes de transfert de chaleur

Résumé

Equation de propagation de la chaleur ; permet (en principe) de déterminer $T(x, y, z, t)$

Version "propre" :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c^* \rho} \nabla^2 T$$

Version avec "source de u"

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c^* \rho} \nabla^2 T + \frac{\sigma_u}{c^* \rho}$$

Le terme source de u permet de rendre compte d'un apport d'énergie par unité de volume par un processus non pris en compte dans le modèle thermodynamique. Par exemple la chaleur générée par la fission dans un barreau de combustible nucléaire.

Loi de Fourier et conductivités typiques :

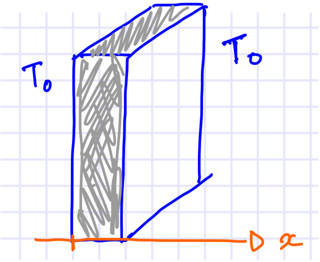
$$\vec{j}_U(\vec{r},t) = -\lambda \vec{\nabla} T(\vec{r},t)$$

Valeurs de λ :

Matériau	λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$
Bois	0.1 à 0.4
Polystyrène expansé (Sagex)	0.036
Acier	50
Cuivre	390
Diamant	1000 à 2600
Pierre calcaire	1.5
Verre	1
Air sec	0.024
Laine de verre	0.04

Exemple 1 : conduction à travers une fenêtre

Exemple 2 : Température dans une plaque de combustible nucléaire



On considère une plaque de combustible nucléaire rectangulaire, d'épaisseur l, dont les faces latérales sont parfaitement isolées et les grandes faces maintenues à la température T_0 .

La réaction nucléaire est à l'origine d'un dégagement d'énergie dont la puissance volumique p_Q est connue.

Etablire le profil de température dans la plaque en régime stationnaire.

Exemple 3 : Onde de chaleur

Exemple de conditions aux limites (boundary conditions) dépendant du temps

6. Effusivité

Certains matériaux sont plus chaud au toucher que d'autres, même s'ils sont à la même température

$$E = \sqrt{\rho \lambda c^*}$$

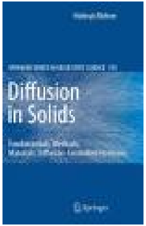
Si on met 2 matériau avec T_1 et T_2 en contact et qu'ils ont les effusivités E_1 et E_2 et

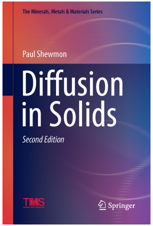
$$T_i = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

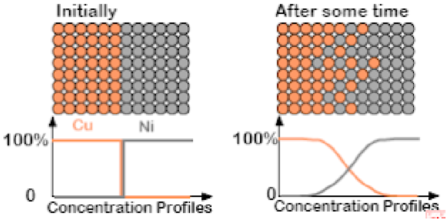
Exemple :

7. Loi de Fick

La loi de Fick régit la diffusion d'espèce en l'absence de convection.







Equation de continuité :

$$\frac{\partial n_A}{\partial t} = \sigma_A - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A$$

Loi de Fick

$$\vec{j}_A(x, t) = -D\vec{\nabla} n_A$$

D coefficient de diffusion

Equation de la diffusion

$$\frac{\partial n_A}{\partial t} = \sigma_A + D\vec{\nabla}^2 n_A$$

8. Généralisation, formalisme de Onsager

Exemple : conduction de charges électriques.

Formalisme de Onsager

Couplage entre coefficients, effet thermoélectriques