Themodynamique
Série Supplémentaire 3:
Patterns de Turing

S. Guinchard*
Section de Physique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Suisse
(Supervised by Prof. J.P. Ansermet)†
(Dated: May 25, 2022)

I. TURING PATTERNS

A. Préambule

Les patterns de Turing résultent de l'équilibre d'un système de réaction-diffusion, après diffusion de plusieurs substances dans l'espace au cours du temps, et interaction entre elles. De tels systèmes sont décris par un ensemble d'équations différentielles comme:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \underline{\underline{D}} \cdot \Delta \mathbf{q} + \mathbf{R}(\mathbf{q}) \tag{1}$$

où $\underline{\underline{D}}$ est une matrice diagonale contenant tous les coefficients de diffusion, et $\cdot$ désigne le produit matriciel. Le vecteur $\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathrm{t})$ représente les inconnues du problème, comme par exemple la concentration de substances chimiques, et $\mathbf{R}$ permet de tenir compte des réactions locales entre les substances. Dans les exemples ci-dessous, deux ensembles particuliers d'équations différentielles sont donnés, décrivant l'interaction de deux substances, comme des pigments. L'interaction se fait à partir d'une distribution aléatoire des deux substances sur une grille bi-dimensionnelle.

Le premier couple d'équations correspond aux équations de Fitzhugh-Nagumo. Le pattern résultant est censé est celui d'un léopard:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= a\Delta U + U - U^3 - V + k, \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{\tau}\Big[b\Delta V + U - V\Big]. \end{aligned} \tag{2}$$

Le second couple correspond à un simple modèle de réaction-diffusion, avec des termes non-linéaires (U^2/V etc). Chaque terme non-linéaire possède un poids individuel qui détermine la forme de l'équilibre résultant:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{C_u U^2}{V} - U + D_u \Delta U, \\ \frac{dV}{dt} &= C_v U^2 - V + D_v \Delta V. \end{aligned} \tag{3}$$

* salomon.guinchard@epfl.ch
† Laboratoire de Physique des Matériaux Nanostructurés, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Suisse

B. Implémentation numérique du problème

1. Implémentez numériquement l'une ou l'autre des situations, $i.e$ commentez ou décommentez le jeu d'équations qui vous intéresse dans le code. Lancez la simulation. Identifiez quelle substance correspond à quelle pigment sur le colorplot et observez son évolution sur les figures au cours du temps.

   i) Pour les équations de Fitzhugh Nagumo, que se passe-t-il si vous imposez $a = b = 0$? En déduire l'importance du laplacien Δ.

   ii) Pour le deuxième système: que se passe-t-il lorsque $C_u = C_v = 0$? En déduire l'importance du terme non-linéaire U^2.