

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

Mécanique 1<sup>er</sup> semestre

Energie potentielle / force

$$\vec{F} = - \vec{\text{grad}} E_p$$

$$= - \nabla E_p$$

Dans notre cas grandeur dépendant de  $\vec{r}$  et  $t$   
 peuvent être des scalaires (masse ou énergie interne id)...  
 des vecteurs ( $\vec{p}$  quantité de mouvement  
 courants de grandeurs extensives.

## 2. Outils mathématiques

gradient

Soit une fonction scalaire  $F(x, y, z)$   $F(\vec{r})$

gradient de  $F$   $\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z$

$$\vec{\nabla} F = \vec{\nabla} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{PA I}$$

Analyse II



## divergence

Champ vectoriel  $\vec{G}(x, y, z)$

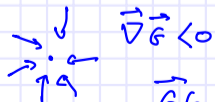
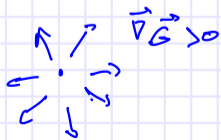
$$\vec{G} = \begin{pmatrix} G_x(x, y, z) \\ G_y(x, y, z) \\ G_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

divergence de  $\vec{G}$   $\text{div. } \vec{G}$  scalaire

$$= \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix}$$

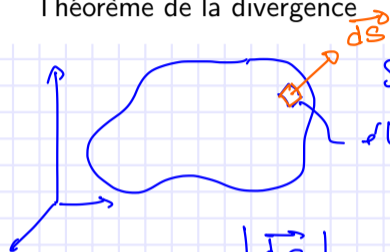


$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$

$\vec{G}(x, y, z) = a z \vec{e}_z \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = a$

Diagram showing a point with arrows pointing upwards, representing a constant positive divergence.

## Théorème de la divergence



Surface fermée  $S$  englobe un volume  $V$

élément de surface d'aire  $dS$

$\vec{dS}$  vecteur  $\perp$  à la surface  $S$  autour de  $dS$   
orienté vers l'extérieur du volume

$$|\vec{dS}| = dS$$

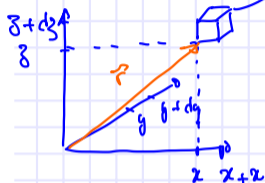
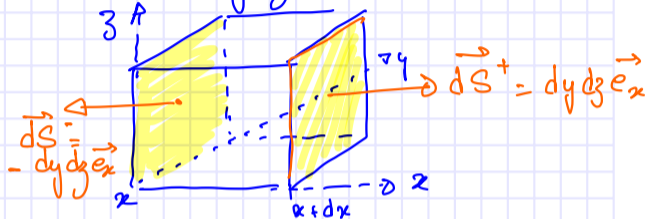
Soit  $\vec{G}(x, y, z)$  champ vectoriel

$\phi_{\vec{G}}$  le flux de  $\vec{G}$  à travers  $S$

$$\phi_{\vec{G}} = \oint_S \vec{G} \cdot \vec{dS}$$

$$\oint_S \vec{G} \cdot \vec{dS} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV$$

définition fonction

cube de volume  $dV = dx dy dz$ 
 $\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$ 
Faces  $\perp$  à  $(Ox)$ 

$$\oint_{\text{cube}} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{faces } \perp (Ox)} \vec{G} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{faces } \perp (Oy)} \vec{G} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{faces } \perp (Oz)} \vec{G} \cdot d\vec{S}$$

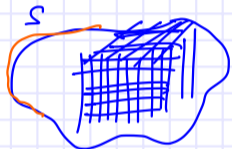
$$\begin{aligned} & \vec{G}(x+dx, y, z) \cdot d\vec{S}^+ + \vec{G}(x, y, z) \cdot d\vec{S}^- = G_x(x+dx, y, z) dy dz - G_x(x, y, z) dy dz \\ & = \frac{G_x(x+dx, \dots) - G_x(x, \dots)}{dx} \cdot dV = \frac{\partial G_x}{\partial x}(x, y, z) dV \end{aligned}$$

pareil sur les autres faces

$$\oint_{\text{cube}} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Volume}} \vec{\nabla} \vec{G} \, dV$$

$$\perp (O_y) \quad \frac{\partial G_y}{\partial y} dV$$

$$\perp (O_z) \quad \frac{\partial G_z}{\partial z} dV$$



Volume V décomposé en cubes.

$$\oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \vec{G} \cdot dV$$

Pour un champ scalaire  $F(\vec{r}) = F(x, y, z)$  le gradient de  $F$ ,  $\vec{\nabla} F$  est le vecteur :

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z$$

Champ vectoriel  $\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z) \vec{e}_x + F_y(x, y, z) \vec{e}_y + F_z(x, y, z) \vec{e}_z$ . La divergence de  $\vec{F}$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  est le scalaire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

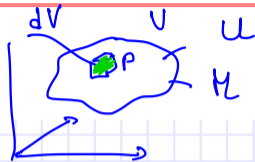
Théorème de la divergence. Pour un volume  $V$  entouré par une surface  $S$  et un champ vectoriel  $\vec{F}$ ,  $\Phi_{\vec{F}}$  flux de  $\vec{F}$  à travers  $S$  :

$$\Phi_{\vec{F}} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$



## 3. Equation de continuité

Grandeurs densitaires volumiques

 $dV$  petit volume autour de  $P$ sous système  $dV = dx dy dz$  $F$  grandeur extensive pour système total  $F(t)$  dans  $dV$ :  $\delta F$  $\delta F$  contribution à  $F$  située dans  $dV$   $F(t) = \int_V \delta F$  $f(\vec{r}, t) = \frac{\delta F}{dV}$   $f(\vec{r}, t)$  grandeur densitaire volumique associé à  $F$ 

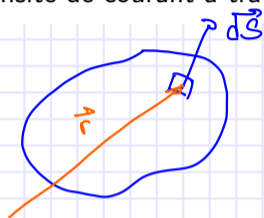
$$F(t) = \int_V f(\vec{r}, t) dV$$

exemple  $U$  énergie interne  $U$  en Joules

$$U(t) = \int_V u(\vec{r}, t) dV$$

$u(\vec{r}, t)$  densité volumique d'énergie interne en  $Jm^{-3}$

## Densité de courant à travers une surface



à travers  $d\vec{S}$  pendant  $dt$  on voit passer  
 $\delta F$  de la grandeur  $F$

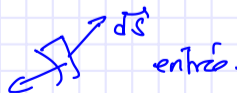
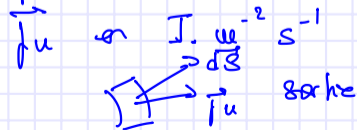
$$\delta F = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t)$$

$\vec{j}$  courant de  $F$   
 en  $\vec{r}$



Energie unitaire  $u$  en Joules  $u(\vec{r}, t)$  en J.  $u^{-3}$



Equation de continuité sans convectionmilieu incompressible indéformable  
 $\rho = \text{cte}$ La conservation d'une grandeur  
dans  $V$  on  $F$  extensive

$$\dot{F} = \text{ce qui entre} - \text{ce qui sort} + \text{ce qui se crée} - \text{ce qui se détruit}$$

par unité de temps

la grandeur  $F$  est liée à la présence de matière.2 mécanismes pour transporter  $F$ • ~~transport~~ de matière  $\rightarrow$  convection• déplacement de  $F$  par rapport à la matière

Conduction

 $F(t)$  $\dot{F}(t) ?$ 

$$F(t) = \int_V f(\vec{r}, t) dV$$

on cherche  $\dot{f}(t) \leftarrow \dot{f}(t) ?$

$$\dot{F} = \int_V \underbrace{\sigma_f(\vec{r}, t)}_{\text{terme source}} dV$$

terme source  $\sigma_f > 0$  création de F  
 $\sigma_f < 0$  destruction de F

$$+ \oint \vec{j}_f \cdot (-d\vec{S})$$

↳ terme de conduction

$$\dot{F} = \int_V \sigma_f(\vec{r}, t) dV - \oint \vec{j}_f \cdot d\vec{S} = \int_V \sigma_f(\vec{r}, t) dV - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f dV$$

$$\dot{F} = \int_V [\sigma_f(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f(\vec{r}, t)] dV = \int_V \dot{f}(\vec{r}, t) dV$$

$$\dot{f}(\vec{r}, t) = \sigma_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f \quad \text{équation de continuité}$$

## Résumé

Soit  $F$  une grandeur extensive scalaire.

$$F(t) = \int_V f(\vec{r}, t) dV$$

En l'absence de convection, le centre de masse de chaque élément de volume est immobile dans le référentiel, l'équation de continuité s'écrit :

$$\dot{f} = \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sigma_f(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f(\vec{r}, t)$$

## Cas particuliers

Entropie  $S$        $\dot{S} = \sigma_S - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_S$        $\sigma_S$  source d'entropie  $\geq 0$

Nombre de moles  $A$        $\dot{n}_A = \sigma_A - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A$        $\sigma_A$  source de  $A$  (réactions chimiques)

$\dot{N}_A = \sum_a \nu_{aA} \dot{\rho}_a$        $\sigma_A = \sum_a \nu_{aA} \omega_a$

Energie interne  $U$        $\dot{u} = \sigma_u - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_u$

$\sigma_u$  ??      on ne peut pas créer de l'énergie !

$\sigma_u$  apparaît si on a des phénomènes physiques non inclus dans le modèle thermodynamique et qui convertissent une autre forme d'énergie en  $U$  (réaction nucléaire)

## 4. Taux de production d'entropie

but trouver  $\sigma_s$  taux de production d'entropie -

$$U = TS - pV + \sum_A \mu_A N_A \quad \text{en densité, locale}$$

$$u = Ts - p + \sum_A \mu_A n_A \quad V \text{ voulue} = 1 \dots$$

$$u(s, p, n_A) \Rightarrow \text{dérivée par rapport à } t \quad \dot{u} = \left[ \frac{\partial u}{\partial s} \right] \dot{s} + \frac{\partial u}{\partial p} \dot{p} + \sum_A \frac{\partial u}{\partial n_A} \dot{n}_A$$

petit volume  $dV$  autour de  $P(x, y, z)$  contient  $\delta S$  et  $\delta U$   $T = \frac{\partial [\delta U]}{\partial [\delta S]}$

$$\boxed{T} = \frac{\partial [u dV]}{\partial [s dV]} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial s}}$$

$$\text{idem } \mu_A = \frac{\partial u}{\partial n_A}$$

$$\dot{u} = T \dot{s} + \frac{\partial u}{\partial p} \dot{p} + \sum_A \mu_A \dot{n}_A$$

incompressible indéformable  $\dot{p} = 0$

$$\vec{u} = T \vec{s} + \sum_A \mu_A \vec{n}_A \quad \text{à travers } dS \Rightarrow \vec{j}_u = T \vec{j}_s + \sum_A \mu_A \vec{j}_A$$

$$\underline{\vec{j}}_s = \frac{1}{T} \vec{j}_u - \sum_A \left( \frac{\mu_A}{T} \vec{j}_A \right) \quad \text{[on cherche } \sigma_s \text{]}$$

$$\dot{s} = \frac{1}{T} \dot{u} - \sum_A \left( \frac{\mu_A}{T} \dot{n}_A \right) \quad \text{On considère } \sigma_u = 0$$

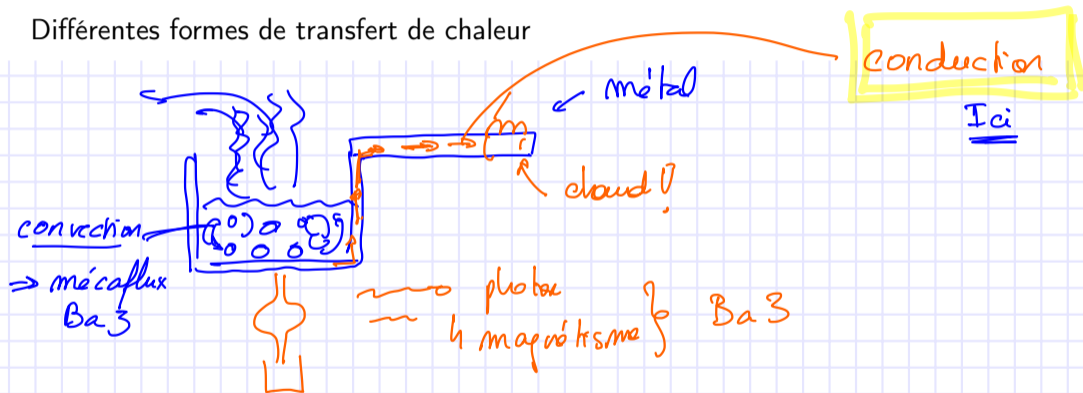
$$\sigma_s - \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{j}}_s = \frac{1}{T} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_u) - \sum_A \left[ \frac{\mu_A}{T} (\sigma_A - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A) \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{T} \vec{j}_u - \sum_A \left( \frac{\mu_A}{T} \vec{j}_A \right) \right) - \frac{1}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_u - \sum_A \frac{\mu_A}{T} \sigma_A + \sum_A \frac{\mu_A}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A \\ &= \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{T} \cdot \vec{j}_u + \cancel{\frac{1}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_u} - \sum_A \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mu_A}{T} \right) \cdot \vec{j}_A - \cancel{\sum_A \frac{\mu_A}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A} - \cancel{\frac{1}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_u} - \sum_A \frac{\mu_A}{T} \sigma_A + \cancel{\sum_A \frac{\mu_A}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A} \end{aligned}$$

$$\sigma_s = \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{T} \cdot \vec{j}_u - \sum_A \vec{\nabla} \cdot \frac{\mu_A}{T} \cdot \vec{j}_A - \sum_A \frac{\mu_A}{T} \sigma_A$$

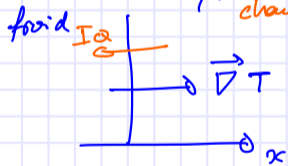
# 5. Loi de Fourier → gouverne la conduction de la chaleur.

Différentes formes de transfert de chaleur



"Loi" de Fourier est phénoménologique

- Un gradient de  $T$  provoque un courant de chaleur  $I_Q$
- Il y a une dépendance linéaire entre  $\vec{\nabla} T$  et courant de  $Q$
- le coefficient de proportionnalité dépend des matériaux



Systèmes incompressibles indéformables

$$\delta Q \equiv dU$$

$$I_Q \propto I_u$$

$$\vec{j}_u = -\lambda \vec{\nabla} T$$

$\lambda$  conductivité thermique  $W K^{-1} m^{-1}$

Avec l'équation de continuité  $\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma_u - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_u$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma_u - \vec{\nabla} \cdot [-\lambda \vec{\nabla} T] = \sigma_u + \lambda \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} T]$$

$\text{div}(\text{grad}(T))$

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$\leftarrow$  Laplacien

$$\boxed{\Delta T} = \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma_u + \lambda \Delta T = \sigma_u + \lambda \nabla^2 T$$

Solides + transformations isothermes ( $V = \text{cte}$ )  $du = C dT$

$dV$  contient  $\delta U$   
capacité thermique  $\delta C$

$$d(\delta U) = \delta C dT$$

$$\frac{dC}{dV} = \frac{\delta C}{\delta m} \frac{\delta m}{dV} \quad \# \quad \delta m \text{ masse de l'élément } dV$$

$$\frac{\delta C}{\delta m} = c^* \text{ capacité cal. massique}$$

$$\frac{\delta m}{dV} = \rho \text{ masse volumique}$$

$$\frac{d(\delta U)}{dV} = \frac{\delta C}{dV} dT = du = c^* \rho dT \Rightarrow \dot{u} = c^* \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^* \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma_u + \lambda \vec{\nabla}^2 T$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c^* \rho} \vec{\nabla}^2 T + \frac{\sigma_u}{c^* \rho}}$$

$$T(x, y, z, t)$$

## Résumé

Equation de propagation de la chaleur ; permet (en principe) de déterminer  $T(x, y, z, t)$

Version "propre" :

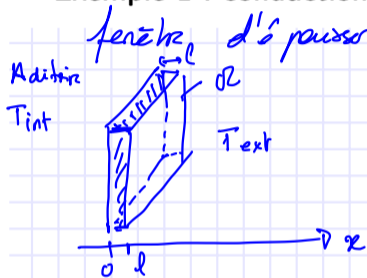
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c^* \rho} \nabla^2 T$$

Version avec "source de  $u$ "

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c^* \rho} \nabla^2 T + \frac{\sigma_u}{c^* \rho}$$

Le terme source de  $u$  permet de rendre compte d'un apport d'énergie par unité de volume par un processus non pris en compte dans le modèle thermodynamique. Par exemple la chaleur générée par la fission dans un barreau de combustible nucléaire.

## Exemple 1 : conduction à travers une fenêtre



fenêtre d'épaisseur  $l$  cadre parfaitement isolé d'air et d'air

$$\Delta T = T_{ext} - T_{int}$$

On cherche : • le profil de température dans la fenêtre  $T(x)$

• la puissance thermique perdue par la fenêtre si  $\Delta T = -20^\circ\text{C}$   
 $l = 4\text{ mm}$   $A = 2\text{ m}^2$

hypothèse : régime stationnaire  $T$  ne dépend pas de  $t \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c^* \rho} \nabla^2 T = 0 \Rightarrow \nabla^2 T = 0 \quad T(x, y, z) = T(x)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = a \text{ constante} \quad T(x) = ax + b \quad a \text{ et } b \text{ constantes}$$

Conditions aux limites  $T(0) = T_{int}$   $T(l) = T_{ext}$   $T(0) = b$

$$T(l) = T_{ext} = a l + T_{int}$$

$$a = \frac{T_{ext} - T_{int}}{l} = \frac{\Delta T}{l}$$

$$T(x) = \frac{\Delta T}{l} x + T_{int}$$

$$\vec{j}_u = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{\Delta T}{l} \vec{e}_x = \boxed{cte} \vec{e}_x \quad |\vec{j}_u| = j_u = \lambda \frac{\Delta T}{l} = cte$$

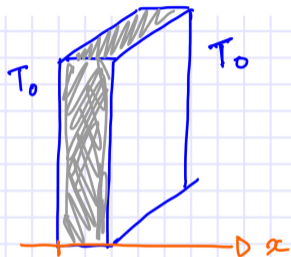
$$j_u = \frac{I_Q}{\sigma}$$

$$I_Q = - \frac{\lambda \Delta T}{l} \sigma$$

$$\lambda_{verre} = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$I_Q = -1 \times \frac{20 \times 2}{4 \cdot 10^{-3}} = 10'000 \text{ W} \quad !$$

## Exemple 2 : Température dans une plaque de combustible nucléaire



On considère une plaque de combustible nucléaire rectangulaire, d'épaisseur  $l$ , dont les faces latérales sont parfaitement isolées et les grandes faces maintenues à la température  $T_0$ .

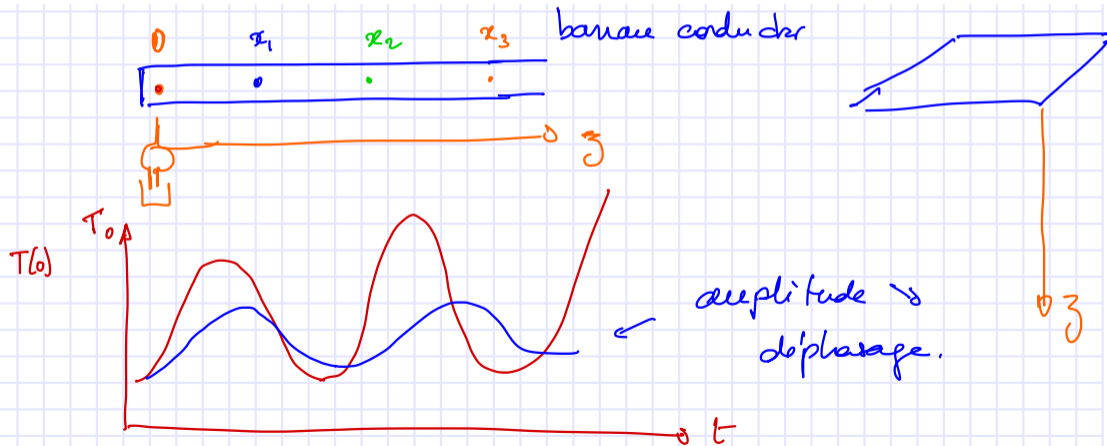
La réaction nucléaire est à l'origine d'un dégagement d'énergie dont la puissance volumique  $p_Q$  est connue. Etablir le profil de température dans la plaque en régime stationnaire.

→ exercice

## Exemple 3 : Onde de chaleur



Exemple de conditions aux limites (boundary conditions) dépendant du temps

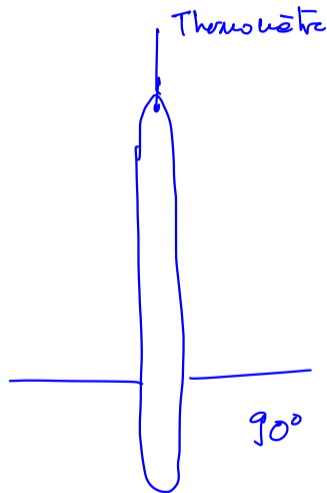


## Loi de Fourier et conductivités typiques :

$$\vec{j}_U(\vec{r}, t) = -\lambda \vec{\nabla} T(\vec{r}, t)$$

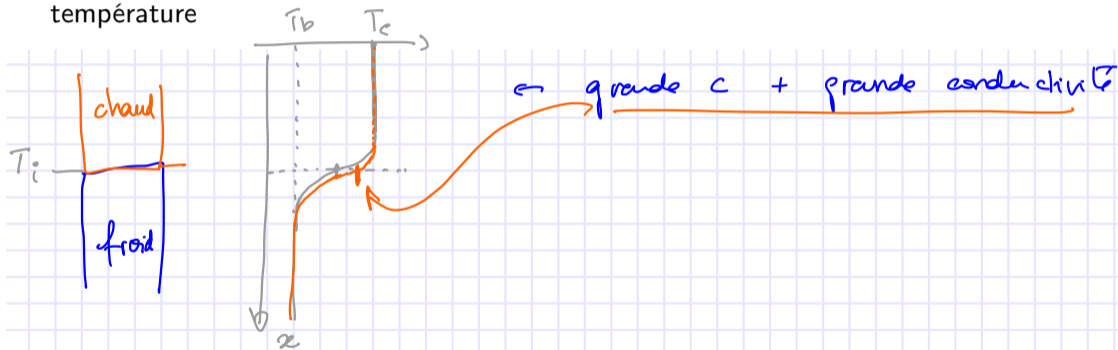
Valeurs de  $\lambda$  :

Matériau	$\lambda$ en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Bois	0.1 à 0.4
Polystyrène expansé (Sagex)	0.036
Acier	50
Cuivre	390
Diamant	1000 à 2600
Pierre calcaire	1.5
Verre	1
Air sec	0.024
Laine de verre	0.04



## 6. Effusivité

Certains matériaux sont plus chaud au toucher que d'autres, même s'ils sont à la même température



On définit  $E$ : effusivité

$$E = \sqrt{\rho \lambda c^*}$$

$$\text{J K}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^{-1/2}$$

Si on met 2 matériaux avec  $T_1$  et  $T_2$  en contact et qu'ils ont les effusivités  $E_1$  et  $E_2$  et

$$T_i = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

Exemple :

$$E_{\text{acier}} = 14\,000 \text{ [SI]}$$

$$E_{\text{bois}} = 400 \text{ [SI]}$$

$$E_{\text{main}} = 500 \text{ [SI]}$$

$$\text{main } 37^\circ \quad \text{objet } 20^\circ$$

$$\text{main / bois} \quad T_i = 28^\circ\text{C}$$

$$\text{main / acier} \quad T_i = 20,3^\circ\text{C}$$

