Solutions

Solution 1

1. Le système de coordonnées adapté à ce problème est évidemment le système sphérique. Pour rappel, les coordonnées cartésiennes sont reliées aux coordonnées sphériques via les relations suivantes :

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

avec $r \in [0, \infty[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [0, \pi]$.

2. L'accélération et la vitesse sont alors données comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{a} =& (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} \\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_\theta} \\ &+ (r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e_\varphi} \\ \vec{v} =& \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + (r\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e_\varphi} \end{aligned}$$

En considérant la contrainte $r = cst$, les vitesse et accélération deviennent alors :

$$\begin{aligned} \vec{v} =& r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + (r\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e_\varphi} \\ \vec{a} =& (-r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_\theta} + (r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e_\varphi} \end{aligned}$$

Il existe une seconde contrainte dans ce cas ($\theta \in [\pi/2 : \pi]$). Cependant cette contrainte n'influe pas sur la simplification des équations.

3. Si la bille reste dans un plan horizontal, alors θ est constant. $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

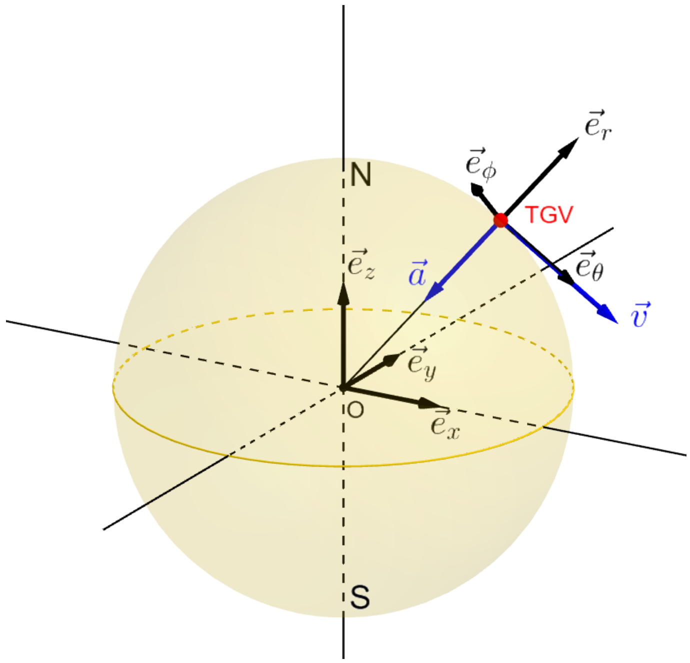
$$\begin{aligned} \vec{v} =& r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\varphi} \\ \vec{a} =& (-r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} + (-r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e_\theta} + (r\sin\theta\ddot{\varphi})\vec{e_\varphi} \end{aligned}$$

4. Le mouvement est circulaire uniforme (de rayon $r\sin\theta$). $v =$cte implique $\dot{\varphi} = \text{cte} = \omega$ $\ddot{\varphi} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{v} =& r\omega\sin\theta\vec{e_\varphi} \\ \vec{a} =& (-r\sin^2\theta\omega^2)\vec{e_r} + (-r\sin\theta\cos\theta\omega^2)\vec{e_\theta} \\ =& (-r\sin\theta\omega^2)(\sin\theta\vec{e_r} + \cos\theta\vec{e_\theta}) \end{aligned}$$

L'accélération est une accélération normale qui pointe vers le centre du cercle. Attention, pas vers le centre de la sphère !

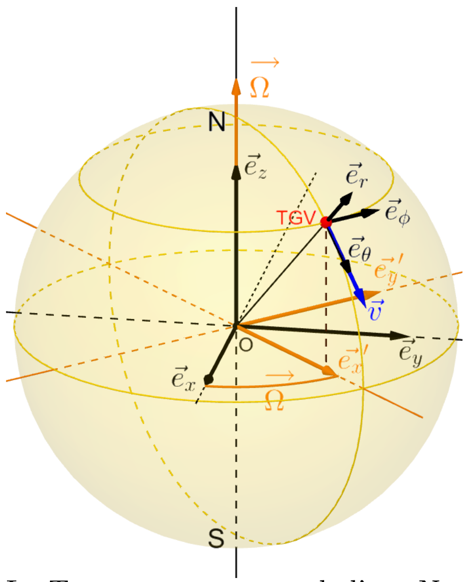
Solution 2

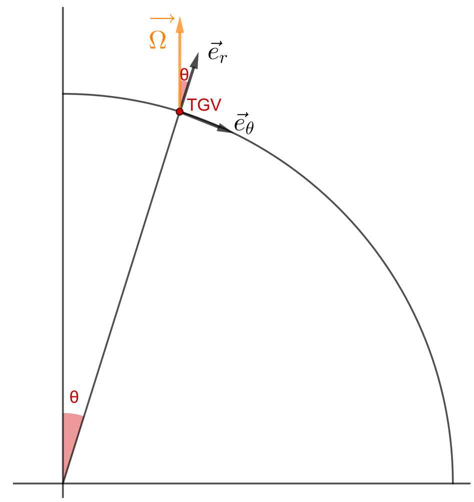
1. 

2. Coordonnées sphériques : r, θ, φ
   Contraintes sur le train :
   $r = R_T$ =cte, φ =cte, $\theta = \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega = \frac{v}{R_T}$ =cte$\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$
   $\vec{v}$ en coordonnées sphériques :
   $\vec{v} = \underset{0}{\cancel{\dot{r}}}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\underset{0}{\cancel{\dot{\varphi}}}\sin\theta\vec{e}_\varphi = R_T\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta = \vec{v}$
   $\Rightarrow \vec{v} = v\vec{e}_\theta$

   $\vec{a}$ en coordonnées sphériques
   $a_r = \cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2 - r\cancel{\dot{\varphi}^2}\sin\theta = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{R_t}$
   $a_\theta = r\cancel{\ddot{\theta}} + 2\cancel{\dot{r}}\dot{\theta} - r\cancel{\dot{\varphi}^2}\cos\theta = 0$
   $a_\varphi = r\cancel{\ddot{\varphi}}\sin\theta + 2r\cancel{\dot{\varphi}}\dot{\theta}\cos\theta + 2\cancel{\dot{r}\dot{\varphi}}\sin\theta = 0$
   $\Rightarrow \vec{a} = -\frac{v^2}{R_T}\vec{e}_r$ Il n'y a alors que l'accélération centripète.

3. $|a| = \frac{v^2}{R_T} = \frac{(300/3{,}6)^2}{6400\cdot 10^3} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\mathrm{ms}^{-2}$

4. 



La Terre tourne autour de l'axe Nord-Sud :
$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ en coordonnées cartésiennes.
$\vec{\Omega} = \Omega \cos\theta \vec{e}_r - \Omega \sin\theta \vec{e}_\theta$ en coordonnées sphériques.
La Terre fait un tour en 24h soit 2π radians en $24 \cdot 3600s \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

5. $\mathcal{R}$: $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $\mathcal{R}'$: $(O, \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ avec Ox' et Oy' liés à la Terre, donc tournant avec, avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}$. Ox' coupe le méridien où circule le train.
Vitesse :

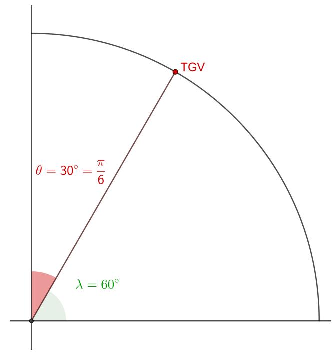
$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) &= \underbrace{\cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}}(A)}}_{\vec{0}} + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP} \qquad A \equiv O \\
&= \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP} \qquad\qquad \overrightarrow{OP} = R_T \vec{e}_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) &= v\vec{e}_\theta + (\Omega \cos\theta \vec{e}_r - \Omega \sin\theta \vec{e}_\theta) \wedge R_T \vec{e}_r \\
&= v\vec{e}_\theta + \Omega \cos\theta R_T \underbrace{\vec{e}_r \wedge e_r}_{\vec{0}} - \Omega \sin\theta R_T \underbrace{\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r}_{-\vec{e}_\varphi}
\end{aligned}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{v\vec{e}_\theta}_{\text{Vitesse du TGV sur Terre}} + \underbrace{\Omega R_T \sin\theta \vec{e}_\varphi}_{\text{Composante liée à la rotation de la Terre}}$$

$v = 300\text{km/h} \Rightarrow v = \frac{300}{3{,}6} = 83\text{m/s}$

$$\Omega R_T \sin\theta = 7,3\cdot 10^{-5} \times 6400 \cdot 10^3 \times \frac{1}{2}$$
$$= 7,3 \times 32 = 230\text{m/s}$$

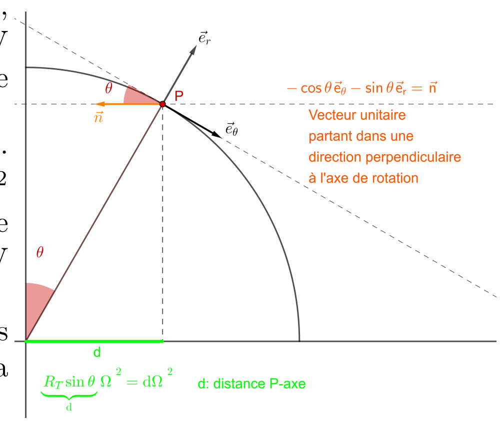


Accélération :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$
$$= -\frac{v^2}{R_T}\vec{e}_r + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP})}_{1} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}_{2}$$

1) $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = \vec{\Omega} \wedge (\Omega R_T \sin\theta \vec{e}_\varphi)$
$= (\Omega\cos\theta\vec{e}_r - \Omega\sin\theta\vec{e}_\theta) \wedge \Omega R_T \sin\theta\vec{e}_\varphi$
$= R_T\Omega^2\sin\theta[\cos\theta \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi}_{-\vec{e}_\theta} - \sin\theta \underbrace{\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi}_{\vec{e}_r}]$
$= R_T\Omega^2\sin\theta[-\cos\theta\,\vec{e}_\theta - \sin\theta\,\vec{e}_r]$

Ce terme est l'accélération centripète liée à la rotation de la Terre. A cause de cette rotation, le point du référentiel $\mathcal{R}'$ où se trouve le TGV à l'instant t décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon $R_T \sin\theta$
La norme de ce terme est : $R_T \sin\theta\Omega^2 = 6400 \cdot 10^6 \times \frac{1}{2} \times (7,3 \cdot 10^{-5})^2 = 170 \cdot 10^{-4} = 0,17\text{ms}^{-2}$
La norme de ce terme est bien plus grande que le terme lié au mouvement circulaire du TGV qui avance sur son méridien (calculée en 3)
Mais ce terme est inclus dans ce que nous mesurons comme étant l'accélération de la pesanteur, et il reste petit devant $\vec{g}$.

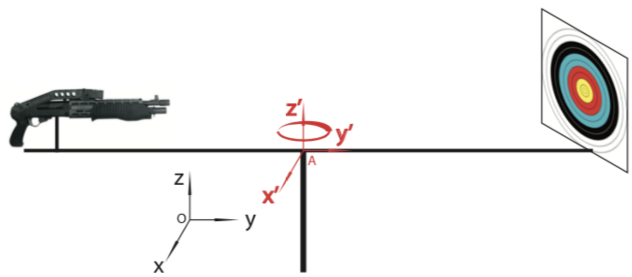


2) $2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$ (Coriolis)
$= 2(\Omega\cos\theta\,\vec{e}_r - \Omega\sin\theta\,\vec{e}_\theta) \wedge v\vec{e}_\theta$
$= 2\Omega v\cos\theta\,\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = 2\Omega v \cos\theta\,\vec{e}_\varphi$

Accélération de Coriolis selon $\vec{e}_\varphi$:

$2\Omega v\cos\theta = \cancel{2}\times 83\times 7,3\cdot 10^{-5}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 1050\cdot 10^{-5} = 0,01\mathrm{ms}^{-2}$
L'accélération de Coriolis est très faible mais est beaucoup plus grande que l'accélération trouvée en 3.

Solution 3
Commençons par définir les référentiels et le système.
Référentiel Galiléen $\mathcal{R}$: Labo
Référentiel en mouvement (donc non Galiléen) $\mathcal{R}'$: plateau tournant avec le fusil $\vec{\Omega}$ dans $\mathcal{R}$
Repères : O_{xyz} lié au référentiel $\mathcal{R}$ et $A_{x'y'z'}$ lié au référentiel $\mathcal{R}'$
On néglige l'effet du poids.



L'accélération est donnée par :
$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \underbrace{\cancel{\dot{\vec{\Omega}}}}_{\vec{0}}\wedge\overrightarrow{AP} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AP}) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$
Il vient, dans le référentiel tournant :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(P) - \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AP}) - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) - \vec{a}_{\mathcal{R}}(A)$$

où :
$\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{0}$ car le point A est fixe dans $\mathcal{R}'$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{0}$ car aucune force ne s'exerce sur la balle puisque l'on néglige la gravité.
Donc, $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = -\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{A}P) - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$, qui s'écrit dans le repère $A_{x'y'z'}$ comme :

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}'\\ \ddot{y}'\\ \ddot{z}'\end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix}-\Omega^2 x'\\ -\Omega^2 y'\\ 0\end{pmatrix}}_{\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{A}P)} - 2\underbrace{\begin{pmatrix}-\Omega\dot{y}'\\ \Omega\dot{x}'\\ 0\end{pmatrix}}_{2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}'}$$

qui peut s'exprimer comme :

$$\ddot{x}' = \Omega^2 x' + 2\Omega\dot{y}' \qquad\qquad \ddot{y}' = \Omega^2 y' - 2\Omega\dot{x}'$$

La vitesse de la balle dans la direction y' (direction du tir) est grande devant la vitesse acquise sur x' (à cause de Coriolis). Cela se voit dans l'expérience car la déviation est faible devant la distance entre la sortie du fusil et la cible.
De plus la vitesse de la balle selon y' ne sera que très faiblement affectée par la rotation (terme centripète lié à la rotation, et terme de Coriolis lié à la vitesse acquise sur x'.
Il en ressort que $\dot{y}' \simeq \text{cte} = v_0$.

On obtient donc grâce à la première équation, $\ddot{x}' = \Omega^2 x' + 2\Omega v_0$

On peut aussi négliger $\Omega^2 x'$ devant $2\Omega v_0$ car la déviation selon x' est faible. (Comparer $\Omega x'$ avec $2v_0$ pour les valeurs numériques données dans l'énnoncé et en prenant $x' = 2$cm (manip en amphi) : $\Omega x' = 6.3$m/s et $2v_0 = 500$ m/s)

Au final, on a donc :

$$\ddot{x}'(t) = 2\Omega v_0 \qquad \dot{x}'(t) = 2\Omega v_0 t \qquad x'(t) = \Omega v_0 t^2$$

L'impact a lieu au temps $t_{imp} \simeq \frac{L+l}{v_0}$ à condition que $d \ll L + l$. Donc

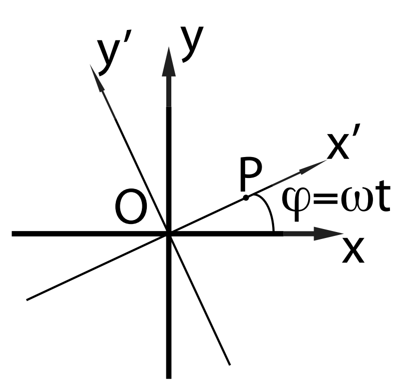
$$d = x'(t_{imp}) = \frac{\Omega (L+l)^2}{v_0}$$

A.N. : $L = 1.1$ m, $l = 0.4$ m, $v_0 = 250$ m·s^{-1}, $\Omega = \pi$ rad·s^{-1} donc $d = 2.8$ cm.

On trouve effectivement une distance d qui justifie l'approximation $\Omega x' \ll 2v_0$

Solution 4

1. Soit $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y})$ le repère cartésien lié au laboratoire et $\mathcal{R}'(O, \vec{x}', \vec{y}')$ le repère cartésien lié au disque.



$$\begin{cases} \vec{x}' = (\cos\omega t)\vec{x} + (\sin\omega t)\vec{y} \\ \vec{y}' = -(\sin\omega t)\vec{x} + (\cos\omega t)\vec{y} \end{cases}$$

Dans $\mathcal{R}'$, la fourmi se déplace sur l'axe $\vec{x}'$, soit $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = v_0\vec{x}'$. Donc :
Dans le repère du disque :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = v_0 t\vec{x}'$$

Dans le repère du laboratoire :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = v_0 t\cos\omega t\vec{x} + v_0 t\sin\omega t\vec{y}$$

On peut aussi définir les coordonnées polaires liées au point P (fourmi). Comme la fourmi se déplace sur l'axe x', en coordonnées polaires, $\vec{e}_\rho = \vec{x}'$ et $\vec{e}_\varphi = \vec{y}'$.

2. Dans $\mathcal{R}$, l'équation paramétrique de la trajectoire est :

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\omega t \\ y = v_0 t\sin\omega t \end{cases}$$

Pour avoir l'équation de la trajectoire il faut éliminer le temps :

$$x^2 + y^2 = v_0^2 t^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = v_0^2 t^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v_0}$$

On en tire :

$$x = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\omega\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v_0})$$

En coordonnées polaires, $\varphi = \omega t$, $\rho = v_0 t$. Alors :

$$\rho = \frac{v_0\varphi}{\omega}$$

3. Dans $\mathcal{R}'$, $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = v_0\vec{x}'$
La formule générale pour le changement de repère est :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AP}$$

Dans notre cas $O = A$, donc $\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) = \vec{0}$. Ainsi, il vient

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = v_0\vec{x}' + \omega\vec{z}\wedge(\overrightarrow{OP}) = v_0\vec{x}' + \omega\vec{z}\wedge(v_o t\vec{x}') = v_0\vec{x}' + \omega v_o t\vec{y}'$$

Et donc :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \begin{cases} v_0\cos\omega t - v_0\omega t\sin\omega t \\ v_0\sin\omega t + v_0\omega t\cos\omega t \end{cases}$$

En coordonnées polaires : $\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = v_0\vec{e}_\rho + v_0\omega t\vec{e}_\varphi$.

4. La fourmi se déplace à vitesse constante sur le disque. Donc :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\vec{0}} + \underbrace{\dot{\vec{\Omega}}}_{\vec{0}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

soit :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \omega\vec{z}\wedge(\omega\vec{z}\wedge v_0 t\vec{x}') + 2\omega\vec{z}\wedge(v_0\vec{x}') = \omega^2 v_0 t\vec{z}\wedge(\vec{z}\wedge\vec{x}') + 2\omega v_0'\vec{z}\wedge\vec{x}' = \omega^2 v_0 t\vec{z}\wedge\vec{y}' + 2\omega v_0'\vec{y}'$$

et donc :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = -\omega^2 v_0 t\vec{x}' + 2\omega v_0\vec{y}'$$

Le premier terme est accélération centripète, le deuxième l'accélération Coriolis. En projetant dans le référentiel absolu, on a :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \begin{cases} -\omega^2 v_0 t\cos\omega t - 2v_0\omega\sin\omega t \\ -\omega^2 v_0 t\sin\omega t + 2v_0\omega\cos\omega t \end{cases}$$

et en coordonnées polaires :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = -\omega^2 v_0 t\vec{e}_\rho + 2v_0\omega\vec{e}_\varphi$$