

Exercice 1 : Aire de jeux

1a Raison

Si l'axe était vertical, ça ne serait pas un axe principal d'inertie, il y aurait des forces latérales

Rq si on pense uniquement que $\vec{P} \sim \vec{v}$ suivant

1b Moment d'inertie

$$I_O = R^2 \left(\frac{M}{2} + m \right)$$

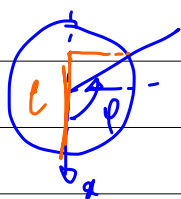
$$I_O = I_O^{\text{disque}} + I_O^{\text{ado}}$$

$$I_O^{\text{disque}} = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_O^{\text{ado}} = m R^2$$

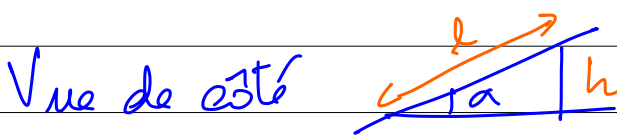
$$I_O = R^2 \left(\frac{M}{2} + m \right)$$

1c Démonstration



$$l = R(1 - \cos \varphi)$$

projection sur (Ox)



$$h = l \sin \alpha$$

$$\Rightarrow h = R \sin \alpha (1 - \cos \varphi)$$

1d Démonstration

Calcul de E_p par arç les points d'équilibre

$$E_p = mgh = mgR \sin \alpha (1 - \cos \varphi) \quad [\text{cte}] \quad \text{Disque}$$

$$\frac{dE_p}{d\varphi} = mgR \sin \alpha \sin \varphi$$

2

Min/Max qd $\frac{dE_p}{d\varphi} = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$
 $\varphi = \pi$

Min en $\varphi = 0$ max en $\varphi = \pi$

↓

eq stable

↓

eq instable

Voir place de centres

1e Equation différentielle

equation

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgR \sin \alpha}{R^2(\frac{1}{2} + m)} \sin \varphi = 0$$

$$E_m = E_p + E_c = mgR \sin \alpha (1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 = \text{cte}$$

1

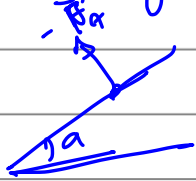
$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = 0 - mgR \sin \alpha \dot{\varphi} (-\sin \varphi) + \frac{1}{2} I_0 \cancel{2\dot{\varphi}} \ddot{\varphi}$$

$$mgR \sin \alpha \sin \varphi + I_0 \ddot{\varphi} = 0$$

Autre approche moments sur le disque sans ads

$$\sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (I_O \dot{\varphi} \vec{e}_3) = I_O \ddot{\varphi} \vec{e}_3$$

$$= \vec{OO}_1 \times M \vec{g} + \vec{OO}_1 \times \vec{N} + \vec{OP} \times \vec{F}_A \quad \vec{F}_A \text{ force ads/dague}$$



→ obtenir $\vec{F}_A$

$$-\vec{F}_A + M \vec{g} = M \vec{a}_{\text{ads}}$$

+ lien $\ddot{\varphi}$ / a_{ads} ...

pas gagné

Autre approche → moments es (ads + dague) → plus
sévère

1f Nature du mouvement; pulsation

nature

oscillations harmoniques / sinusoïdal

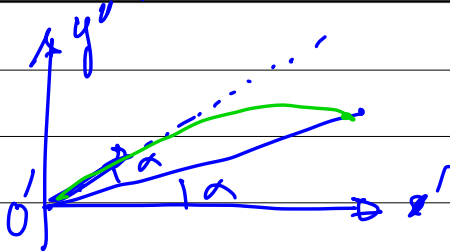
$\Omega_0 =$

... en fonction de ce qui a été trouvé en(e)

↳ réponse correcte: $\sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{R(\frac{M}{2} + m)}}$

1g Vitesse

$$v_0 = \sqrt{gR \frac{\cos \alpha}{\cos^2 2\alpha (\tan 2\alpha - \tan \alpha)}}$$



angle de tir: 2α
arrive en A $\begin{cases} 2R \cos \alpha \\ 2R \sin \alpha \end{cases}$

balistique dans $(O'x'y')$

$$\vec{a} \begin{cases} 0 \\ -g \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_0 \cos 2\alpha \\ -gt + v_0 \sin 2\alpha \end{cases}$$

$$\vec{r} \begin{cases} (v_0 \cos 2\alpha) t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin 2\alpha t \end{cases}$$

$$\vec{r}_f \begin{cases} (v_0 \cos 2\alpha) t_f = 2R \cos \alpha \\ -\frac{1}{2}gt_f^2 + v_0 \sin 2\alpha t_f = 2R \sin \alpha \end{cases}$$

$$t_f = \frac{2R \cos \alpha}{v_0 \cos 2\alpha} \Rightarrow -\frac{1}{2}g \frac{2R \cos^2 \alpha}{v_0^2 \cos^2 2\alpha} + v_0 \sin 2\alpha \frac{2R \cos \alpha}{v_0 \cos 2\alpha} = 2R \sin \alpha$$

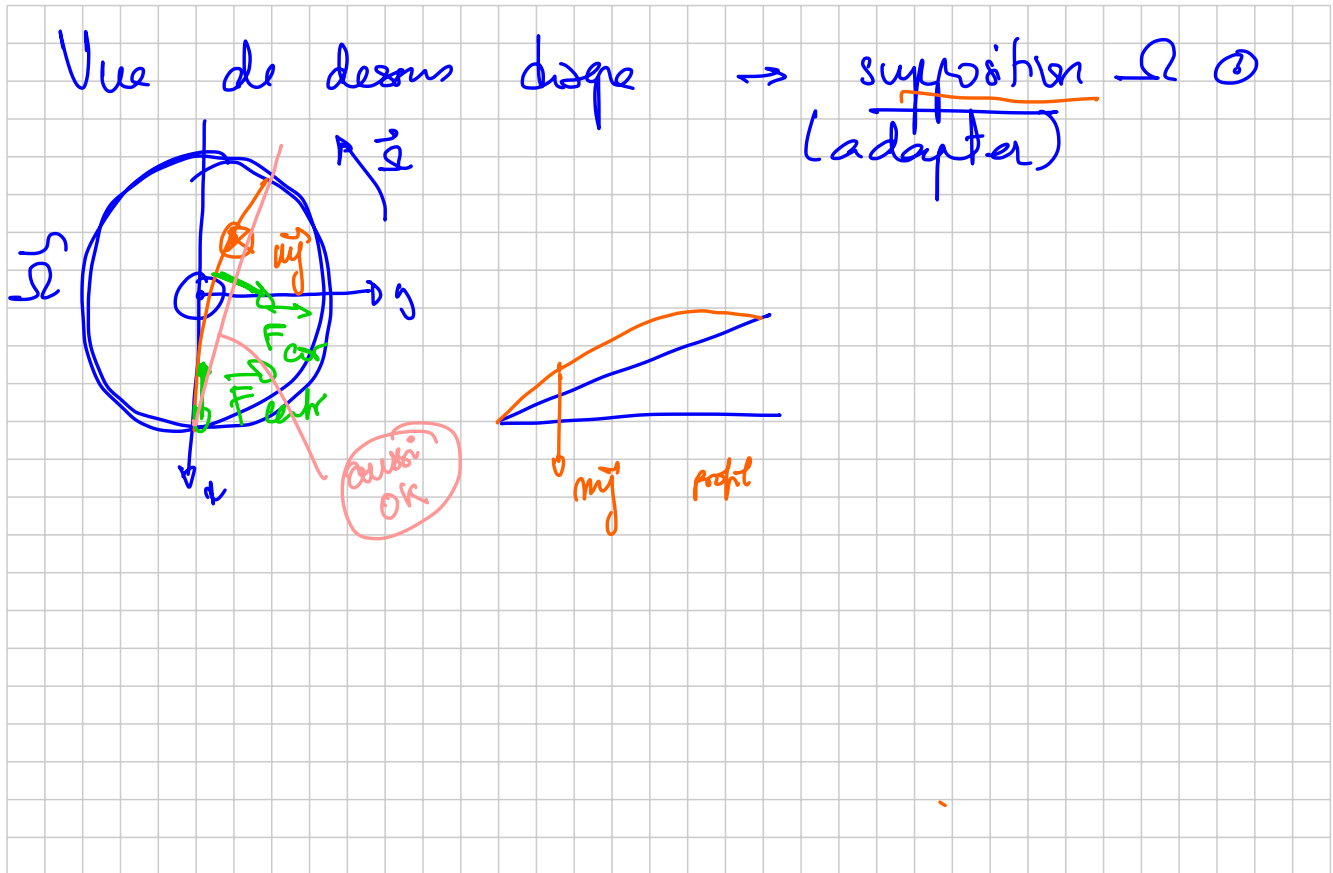
$$\frac{2gR \cos^2 \alpha}{v_0^2 \cos^2 2\alpha} = 2 \cos \alpha \tan 2\alpha - 2 \sin \alpha$$

$$v_0^2 = gR \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 2\alpha (\cos \alpha \tan 2\alpha - \sin \alpha)}$$

$$= gR \frac{\cos \alpha}{\cos^2 2\alpha (\tan 2\alpha - \tan \alpha)}$$

1h Schéma

1



1i Explication (mettre les forces sur le dessin de la question 1i)

1

Force réelle : $\vec{m}\vec{g}$

forces fictives : force de Coriolis : $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_R(P)$

$\vec{v}$ $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ $\Rightarrow$ $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

Forces centrifuge $\vec{F}_{cent}$ pointe depuis le centre du cercle

1j Place de secours pour exercice 1

Question d

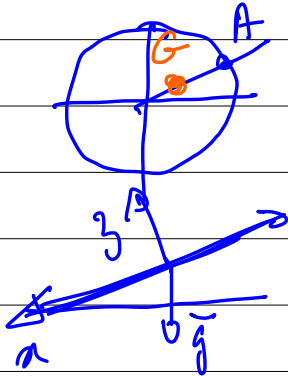
Autre solution: $\sum \vec{F} = \vec{0}$ et $\sum \vec{L}_O = \vec{0}$
pour montrer pos° d'équilibre

+ montrer dans quel sens cela part (calcul ou statique)
 $\hookrightarrow \varphi = 0 \rightarrow$ stable
 $\varphi = \pi \rightarrow$ instable

1^e alternative (pas simple)

$$\sum \vec{L}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad \text{sur axe } z \text{ disque}$$

$$\sum \vec{L}_O = \vec{OO} \wedge \vec{N} + \vec{OG} \wedge (M+m)\vec{g} \quad G: \text{cm du axe } z \text{ disque}$$



$$(M+m)\vec{OG} = M\vec{OO} + m\vec{OA}$$

$$\vec{OG} = \frac{m}{M+m} \vec{OA}$$

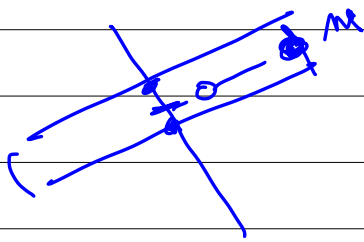
$$\vec{g} = g \sin \alpha \vec{e}_n - g \cos \alpha \vec{e}_z$$

$$\vec{OG} = OG \cos \varphi \vec{e}_n + OG \sin \varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{OG} \wedge (m+m)\vec{g} = [OG \cos \varphi \vec{e}_n + OG \sin \varphi \vec{e}_y] \wedge [g \sin \alpha \vec{e}_n - g \cos \alpha \vec{e}_z]$$

$$= OG \cos \varphi (-g \cos \alpha) (-\vec{e}_y) + OG g \sin \varphi \sin \alpha (-\vec{e}_z) - OG \sin \varphi g \cos \alpha \vec{e}_n$$

1) Place de secours pour exercice 1



→ m plus que la tige dans le mur, et fait en fait 2 points par moment le dique d'assurer la rotation autour de l'axe
2 points sur l'axe → moment 1 axe

composées des composantes $\vec{e}_n$ et $\vec{e}_g$

Rele $\vec{e}_3$

$$\vec{L}_0 = -OG \sqrt{(M+m)} g \sin \varphi \sin \alpha \vec{e}_3 = -\frac{m}{(M+m)} \sqrt{(M+m)} g \sin \varphi \sin \alpha \vec{e}_3$$

$$= -m g \sin \varphi \sin \alpha \vec{e}_3$$

$$\vec{L}_0 = I_0 \dot{\varphi} \vec{e}_3 \rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = I_0 \ddot{\varphi} \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow I_0 \ddot{\varphi} \vec{e}_3 = -m g \sin \varphi \sin \alpha \vec{e}_3$$

$\Rightarrow$ résultat

tous les points si disposition "miraculeuse" du tourne fixant

+ 0,5 bonus si bonne explication (...)

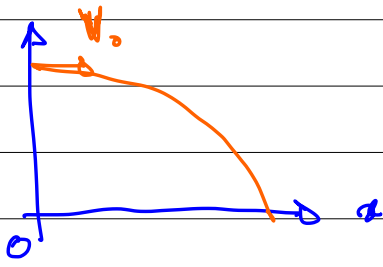
Exercice 2 : lancer sur plateforme mouvante

2a Distance L parcourue horizontalement par la balle

$$L = 2 \sqrt{\frac{\Delta K h}{g m}}$$

$$\Delta K \rightarrow E_c$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = \frac{2 \Delta K}{m}$$



$$\vec{a} \Big|_0$$

$$\vec{v} \Big|_{v_0}$$

$$\vec{r} \Big|_{v_0 t}$$

$$- \frac{1}{2} g t^2 + h$$

$$\text{à } t_f \text{ en } \vec{r} \Big|_0$$

$$\Rightarrow - \frac{1}{2} g t_f^2 + h = 0$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = L$$

$$L = \sqrt{\frac{2 \Delta K}{m}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 \sqrt{\frac{\Delta K h}{g m}}$$

2b Vecteur vitesse $\vec{v}_f$ de la balle juste avant le choc

$$\vec{v}_f = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}} \vec{e}_x - \sqrt{\frac{2h}{g}} \vec{e}_y = \sqrt{2gh} \vec{e}_y$$

$$\vec{v}_f \begin{vmatrix} v_0 \\ -gt_f \end{vmatrix}$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\vec{v}_f \begin{vmatrix} v_0 \\ -g\sqrt{\frac{2h}{g}} \end{vmatrix}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}}$$

Essai $E_{mi} = E_{mf}$ $\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$ (ou $\Delta K + mgh$) = E_{mi}
 $\frac{1}{2}mv_f^2 = E_{mf} \Rightarrow v_f = \left[\frac{2(\Delta K + mgh)}{m} \right]^{1/2}$
 $\hookrightarrow \text{max } 0,6$ Mauve vecteur

2c Vitesse finale $\vec{v}_p$ de la plateforme juste après l'impact

$$\vec{v}_p = \frac{m}{m+M} \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}} \vec{e}_x \leftarrow \text{important!}$$

Choc max, conservation $\vec{p}$ horizontal seule ($\vec{e}_x$)

$$m\vec{v}_0 + \vec{0} = (m+M)\vec{v}_p$$

$$\vec{v}_p = \frac{m}{m+M} \vec{v}_0 = \frac{m}{m+M} \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}} \vec{e}_x \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}}$$

2d Vitesse initiale horizontale $\vec{v}'_0$ du projectile en fonction de ΔK

$$\vec{v}'_0 = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m(1+\frac{m}{M})}} \vec{e}_x \quad (= \sqrt{\frac{M 2\Delta K}{m(M+m)}} \vec{e}_x = \left(\sqrt{\frac{M}{M+m}} \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}}\right) \vec{e}_x)$$

- Conservation $\vec{p}$ (explosion élastique)

Avant: $\vec{p} = \vec{0}$ après $\vec{p} = M\vec{v}'_p + m\vec{v}'_0$

ΔK converti en E_c f $\Delta K = \frac{1}{2} m v_0'^2 + \frac{1}{2} M v_p'^2$

$M v_p' + m v_0' = 0 \Rightarrow v_p' = -\frac{m}{M} v_0'$

$M v_p'^2 + m v_0'^2 = 2\Delta K \Rightarrow \frac{m^2}{M} v_0'^2 + m v_0'^2 = 2\Delta K$

$v_0'^2 = \frac{2\Delta K}{m(1+\frac{m}{M})} = \frac{M 2\Delta K}{m(M+m)}$

$= \frac{M}{M+m} \frac{2\Delta K}{m}$

2e Comparaison L' et L

☐ $L' > L$ ☐ $L' < L$ ☐ $L' = L$ ☒ On ne peut pas dire

v_0 à cause conservation $\vec{p}$ v_0' car plus forte réaction
 $\Rightarrow$ on ne peut pas dire

2f Distance L' entre le lanceur et l'endroit où la balle touche la plateforme

$$L' = \sqrt{\frac{M+m}{M}} \sqrt{\frac{2\Delta k}{m}} \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (R_q L' > L)$$

la balle part avec $v'_0 = \sqrt{\frac{2\Delta k M}{m(M+m)}}$

t_f en charge $t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow$ la balle a parcouru $t_f v'_0$

la pla tforme part avec $v_p = -\frac{m}{M} v'_0$

elle recule de $-v_p t_f = \frac{m}{M} v'_0 t_f$

$L' =$ somme des 2 $L' = v'_0 t_f - v_p t_f$

$$L' = (v'_0 - v_p) \sqrt{\frac{2h}{g}} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) v'_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$L' = \sqrt{\frac{M+m}{M}} \sqrt{\frac{2\Delta k M}{m(M+m)}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\Delta k (M+m)}{Mm}} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

2g Dans quelle limite sur $\frac{M}{m}$ retrouve-t-on $L' = L$? Commentez.

Si $\frac{M}{m} \rightarrow \infty$ $M \gg m$ $\sqrt{\frac{M+m}{M}} = \sqrt{1 + \frac{m}{M}} \rightarrow 1$

On retrouve $L' = L$

Si la pla tforme est ∞ bande, elle ne bouge pas



2h Vitesse finale $\vec{v}'_p$ de la plateforme par rapport au sol après le choc mou

$$\vec{v}'_p \rightarrow \vec{0}$$

1 Conservation de $\vec{p}_{\text{horiz}}$ entre avant et après choc
 avant $\vec{p}_{\text{avant}} = \vec{0} \Rightarrow$ après $= (M+1) \vec{v}'_p = \vec{0} \Rightarrow \vec{0}$

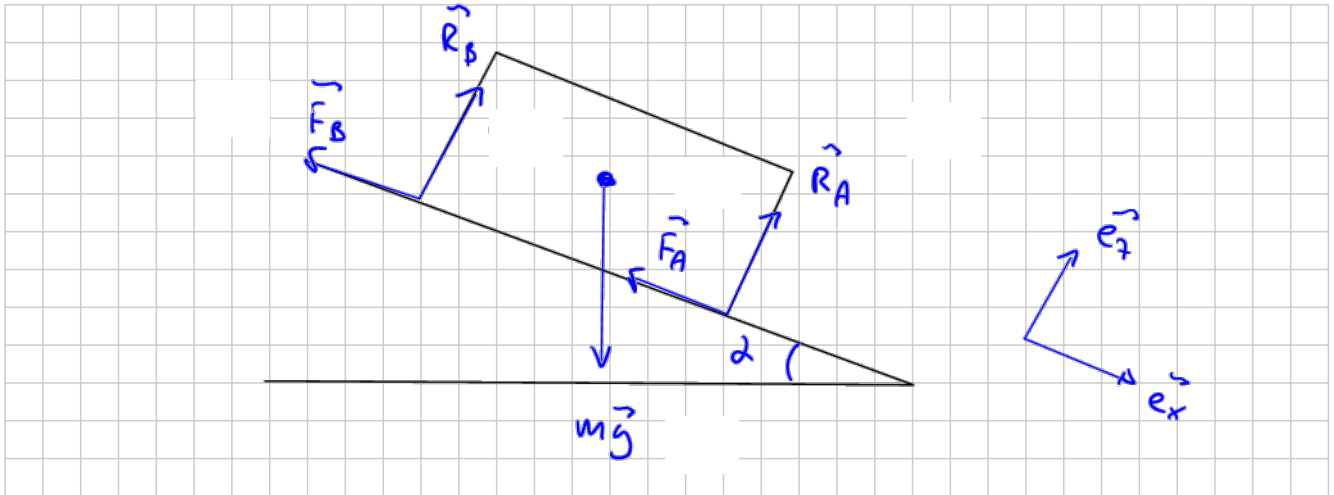
possible de faire le calcul

2i Place de secours pour exercice 2



Bloc glissant sur une pente

3a Dessin



3b Vitesse après une distance L

2,5

$$v_f = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha) + v_0^2}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} ma_x = -F_A - F_B + mg \sin\alpha \\ ma_y = R_A + R_B - mg \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$R_A + R_B = mg \cos\alpha$$

$$ma_x = -\mu_c(R_A + R_B) + mg \sin\alpha$$

$$= -\mu_c mg \cos\alpha + mg \sin\alpha$$

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha) \quad v_x = a_x t + v_0$$

$$\text{avec } x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t$$

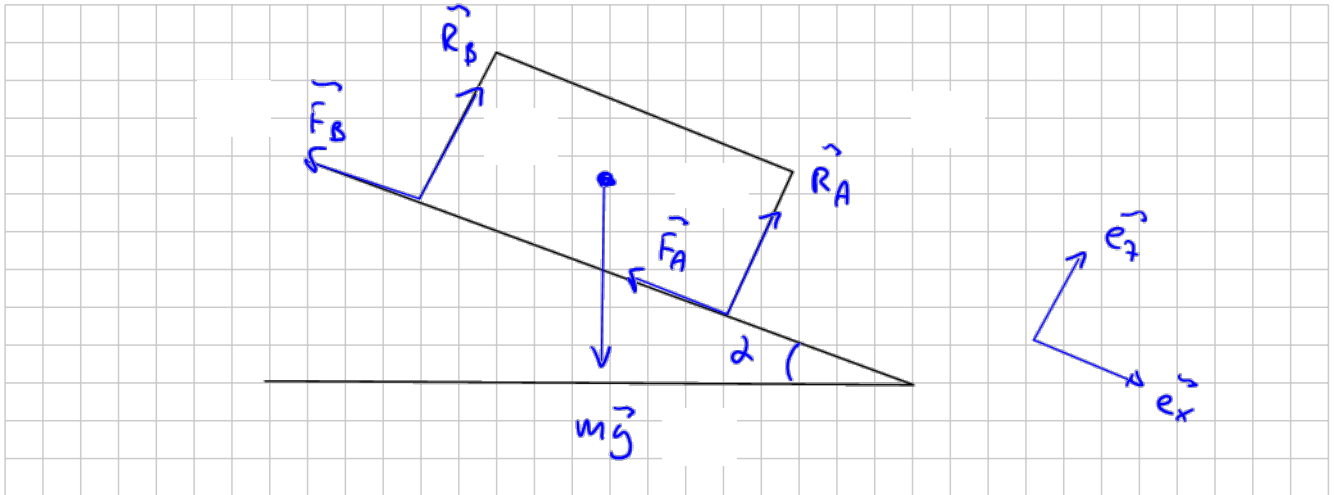
$$\text{à } t_f, \quad x = L = \frac{1}{2} a_x t_f^2 + v_0 t_f$$

$$t_f = \frac{v_f - v_0}{a_x} \Rightarrow L = v_0 \left(\frac{v_f - v_0}{a_x} \right) + \frac{1}{2} a_x \left(\frac{v_f - v_0}{a_x} \right)^2$$

$$\dots \quad v_f = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha) + v_0^2}$$

Bloc glissant sur une pente

3a Dessin



3b Vitesse après une distance L

 $v_f =$

$$v_f = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha) + v_0^2}$$

Energie / travail / non conservatif

$$E_{m,2} = E_{m,1} + W_{\vec{F}_A} + W_{\vec{F}_B}$$

$$E_{m,2} = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$E_{m,1} = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgL \sin\alpha$$

$$W_{\vec{F}_A} = -L \mu_c R_A$$

$$W_{\vec{F}_B} = -L \mu_c R_B$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgL \sin\alpha - L \mu_c (R_A + R_B)$$

comme $R_A + R_B = mg \cos\alpha$ (Eqr. en x)

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgL \sin\alpha - L \mu_c mg \cos\alpha$$

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2Lg(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha)}$$

[illegible]

3c Force de réaction du sol s'exerçant sur le point B pendant le mouvement.

$$\vec{R}_B = \frac{1}{2} m g \cos \alpha \left(1 - \mu_c \frac{h}{\ell} \right) \vec{e}_r = m g \cos \alpha \left(\frac{\ell - \mu_c h}{2\ell} \right) \vec{e}_r$$

$$\sum \vec{M}_O = 0 \quad \vec{G}\vec{B} \times \vec{R}_B + \vec{G}\vec{B} \times \vec{F}_B + \vec{G}\vec{A} \times \vec{R}_A + \vec{G}\vec{A} \times \vec{F}_A + \vec{G}\vec{C} \times \vec{W}_C = 0$$

$$\vec{G}\vec{B} \times \vec{R}_B = \mu R_B \vec{e}_z \quad \vec{G}\vec{A} \times \vec{R}_A = -\mu R_A \vec{e}_z \quad \underline{\underline{= 0}}$$

$$\vec{G_B} \times \vec{F_B} = \mu_c h N_B \vec{e_z} \quad \vec{G_A} \times \vec{F_A} = \mu_c h N_A \vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \ell(R_B - R_A) + \mu_c h(R_B + R_A) = 0$$

$$\text{also } \sum F_x = 0 \quad R_B + R_A = mg \cos 2$$

$$\begin{cases} \ell(R_B - R_A) + \mu_c h m g \cos \alpha = 0 \\ -R_A = R_B - m g \cos \alpha \end{cases}$$

$$\dots \quad R_B = \frac{1}{2} m g \cos \alpha \left(1 - \mu_c \frac{h}{l} \right)$$

$$= m g \cos \alpha \left(\frac{l - \mu_c h}{2l} \right)$$

3d Condition sur μ_c pour que le point B ne décolle pas du sol, en fonction de h et l seulement

$$\text{de } R_B = \frac{1}{2} m g \cos \alpha \left(1 - \mu_c \frac{h}{l} \right)$$

$$R_B > 0 \quad \mu_c \frac{h}{l} < 1$$

$$\mu_c < \frac{l}{h}$$

3e Pente critique, $\tan(\alpha_b)$, pour laquelle le bloc commence à basculer

$$\tan(\alpha_b) = \frac{\ell}{h}$$

25
 (A) $\sum F = 0$

$$\begin{cases} m a_x = -\mu_s (R_A + R_B) + m g \sin \alpha = 0 \\ m a_y = R_A + R_B - m g \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\mu_s m g \cos \alpha = m g \sin \alpha$$

$$\mu_s = \tan(\alpha)$$

condition pour pas de glissement

(B) $\sum \vec{M}_O = 0$ cas limite pour une rotation

$$\sum \vec{M}_O = 0 \quad \vec{G}\vec{B} \times \vec{R}_B + \vec{G}\vec{B} \times \vec{F}_B + \vec{G}\vec{A} \times \vec{R}_A + \vec{G}\vec{A} \times \vec{F}_A + \vec{G}\vec{G} \times \vec{m}\vec{g} = 0$$

$$\vec{G}\vec{B} \times \vec{R}_B = \ell R_B \vec{e}_z \quad \vec{G}\vec{A} \times \vec{R}_A = -\ell R_A \vec{e}_z \quad \vec{G}\vec{G} \times \vec{m}\vec{g} = 0$$

$$\vec{G}\vec{B} \times \vec{F}_B = \mu_s h N_B \vec{e}_z \quad \vec{G}\vec{A} \times \vec{F}_A = \mu_s h N_A \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \ell(R_B - R_A) + \mu_s h (R_B + R_A) = 0$$

avec $\sum F_x = 0 \quad R_B + R_A = m g \cos \alpha$

$$\begin{cases} \ell(R_B - R_A) + \mu_s h m g \cos \alpha = 0 \\ -R_A = R_B - m g \cos \alpha \end{cases}$$

$$R_B = \frac{1}{2} m g \cos \alpha \left(1 - \mu_s \frac{h}{\ell} \right)$$

$$\mu_s < \frac{\ell}{h}$$

(A+B) $\tan \alpha = \frac{\ell}{h}$

3e Pente critique, $\tan(\alpha_b)$, pour laquelle le bloc commence à basculer

$$\tan(\alpha_b) = \frac{p}{h}$$

Cas limite

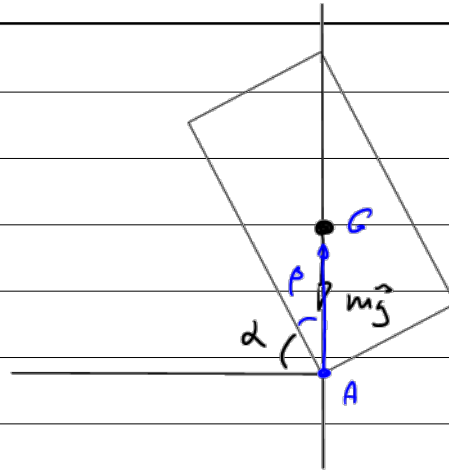
$$\vec{AG} \parallel m\vec{j}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{h}{e}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{h}{e}\right)$$

$$\tan \alpha = \frac{e}{h}$$



3f Condition sur h, l et μ_s seulement, pour que le bloc commence à basculer avant de glisser.

condition pour pas de glissement

$$\tan(\alpha) \leq \mu_s$$

condition de basculement

$$\tan(\alpha) = \frac{l}{h}$$

$$\mu_s > \frac{l}{h}$$

3g Place de secours exercice 3