X - Dynamique du solide indéformable

Prof. Cécile Hébert

18 novembre 2021

Plan du cours

Table des matières

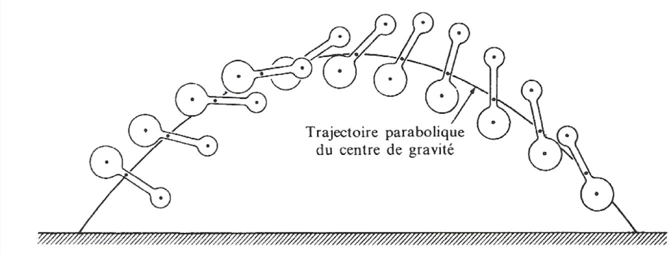
X-1. Introduction. Du système de points au solide indéformable.

Un solide indéformable peut avoir un mouvement

– de translation

– de rotation

Il va falloir mettre de nouveaux concepts en place pour le mouvement de rotation !



2 - Centre de masse et lois de Newton

Quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

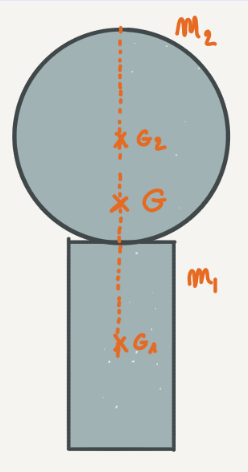
Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

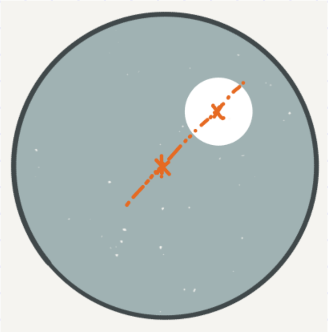
Important dans tous les cas : le poids s'applique au centre de masse.

Détermination du centre de masse d'un solide

Superposition de deux solides :



solide à trou



Chercher le c.d.m. entre le solide sans trou et un "trou" de masse négative égale à la masse enlevée au solide.

3 - Statique

Les conditions sont alors :

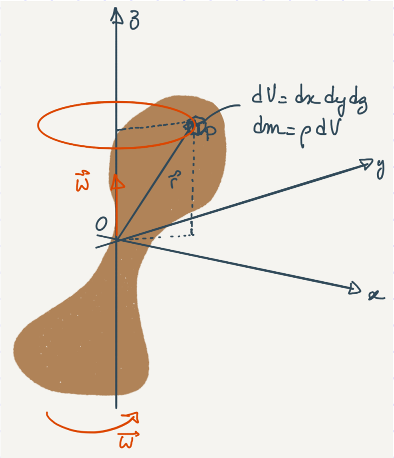
$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{0}$$

Exemple : poutre (non homogène !) de masse m sur 2 supports. Déterminer les forces F_A en A et F_B en B exercées par les supports

$$F_A = mg\frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

$$F_B = mg\frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

4 - Energie (cinétique) de rotation


z
dV = dx dy dz
dm = ρ dV
y
$\vec{\omega}$
$\vec{r}$
O
x
$\vec{\omega}$

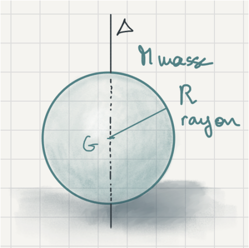
$$E_{C,\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{\text{vol}} R^2 \rho(r) d\vec{r} = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$$

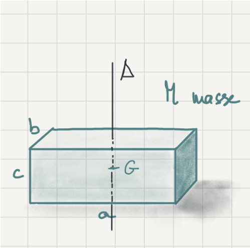
Avec I_z moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz)

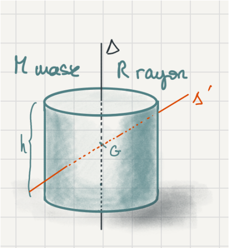
$$I_z = \int_{\text{vol}} R^2 \rho(r) d\vec{r}$$

5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Solides usuels







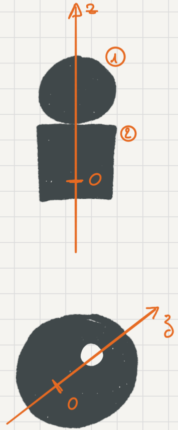
Théorème de Steiner :

Si on a deux axes *parallèles* (Oz) et (Gz) distants de a, avec G centre de masse. Si I_{Gz} est le moment d'inertie par rapport à (Gz) alors

$$I_{Oz} = I_{Gz} + ma^2$$

I_{Oz} moment d'inertie par rapport à (Oz)

Solides composés et solides à trous



Application

6 - Moment cinétique d'un solide.

Rappel : quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

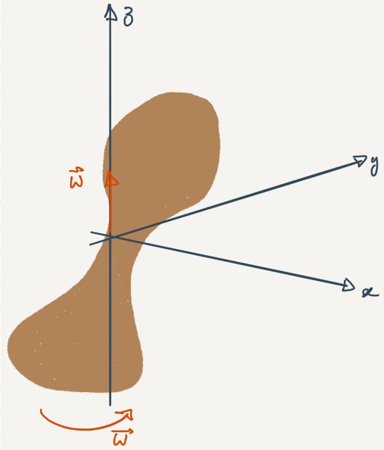
$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

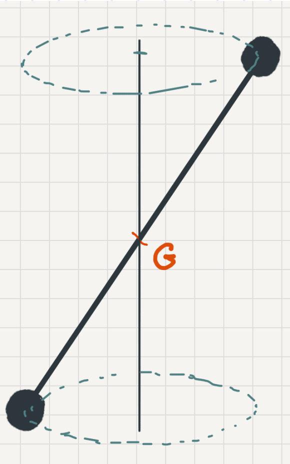
Théorème du moment cinétique pour un solide

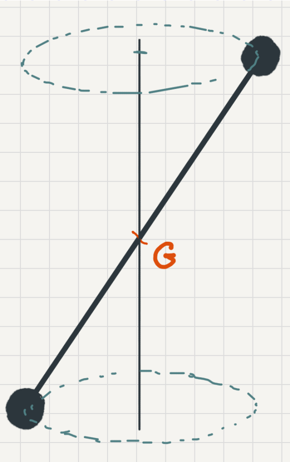
$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

Soit un solide en rotation autour d'un axe passant par G. On place l'axe (Gz) de manière que ce soit l'axe de rotation. Le vecteur rotation est alors $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

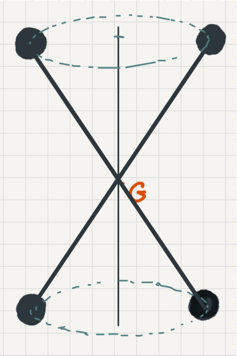


Cas simple : "haltère" en rotation, dont la tige a une masse négligeable.



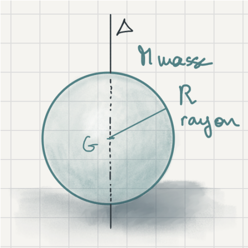

G

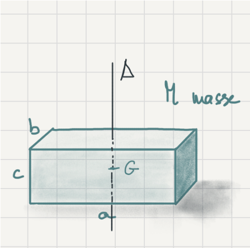
En général, le moment cinétique n'est pas parallèle à l'axe de rotation. Sauf si il y a une certaine symétrie dans la répartition de la masse :

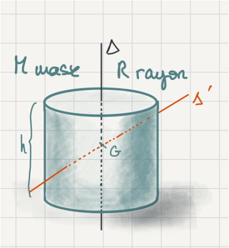


Dans certains cas $\vec{L}_G // \vec{\omega}$. Alors : $\vec{L}_G = I_{Gz}\vec{\omega}$

Exemples de cas symétriques :







Exemple

7 - Solide qui roule

Problématique

Parfois, on souhaite utiliser un point *non fixe* pour étudier le mouvement.

En résumé :

Pour pouvoir utiliser

$$\vec{M}_A^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t}$$

Il faut que A soit fixe dans le référentiel, ou confondu avec le c.d.m. ou se déplace à une vitesse colinéaire à celle du c.d.m.

Pour pouvoir calculer $\vec{L}_A$ avec $\vec{L}_A = I_{Az}\vec{\omega}$

Il faut que (Az) soit un axe principal d'inertie

ET que

$A = G$ OU A est un point du solide à vitesse nulle.

(O, x, y, z) peuvent-ils être axes principaux d'inertie ?

Oui, si (G, x, y, z) sont axes principaux d'inertie et si O appartient à un axe principal d'inertie.

Dans ce cas, pour une rotation autour de (Oz) :

$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ et $\vec{L}_O = I_{Oz} \vec{\omega}$.

Comparaison translation / rotation

8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

Cas ou l'axe de rotation passe par G, centre de masse :

En fait, de manière générale :

$$\vec{L}_G = \underline{I}_G \vec{\omega}$$

avec :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2) dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2+z^2) dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2+y^2) dm \end{bmatrix}$$

$\underline{I}$ est le tenseur d'inertie, il dépend de l'origine et des axes choisis.

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$