Les seuls objets autorisés sont:
- une feuille A4 manuscrite recto-verso
- stylos, etc.
Les réponses finales à chaque question ainsi que la justification de la réponse doivent être reportées sur l'énoncé dans les cases prévues à cet effet.

Seul le cahier de réponse est ramassé et corrigé. Pas de feuilles volantes.

L'examen comporte 3 exercices, numérotés de 1 à 3
Le nombre de points maximum pour cet examen est de 36 points + 1 point de bonus

Ne pas retourner avant le début de l'épreuve

Exercice 1 Séparation des modules d'une fusée (12 points + 1 point bonus)

Dans ce problème, nous étudions la trajectoire d'une fusée de type "Falcon 9", développée par la société SpaceX. Trois minutes après son lancement, l'étage inférieur de la fusée coupe ses moteurs et se sépare de l'étage supérieur. Pour la suite de ce problème, nous nous intéresserons à la trajectoire de l'étage inférieur de la fusée de masse M. Au temps $t_0 = 0$ de la séparation, l'étage inférieur se trouve à une altitude $z_0 = 80$ km et se déplace verticalement vers le haut avec une vitesse de $v_{z0} = 1.5$ km s^{-1} et horizontalement vers l'Est avec une vitesse $v_{x0} = 0.15$ km s^{-1}. Nous négligeons l'effet de la rotation de la Terre ainsi que sa courbure, et supposons que le champ de pesanteur est constant et vaut $g \simeq 10$ m s^{-2}. Nous considérons également une force de frottement fluide de la forme $\vec{F} = -K\eta\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse.

a. Faire un schéma et représenter: les forces s'appliquant sur l'étage inférieur ainsi que son vecteur vitesse, juste après la séparation.

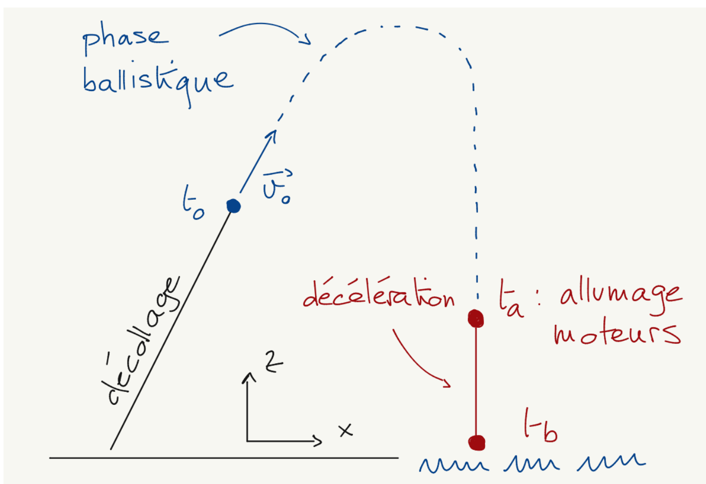
☞ Nous considérons premièrement la situation où la force de frottement fluide est négligée. Les données du problème sont v_{x0}, v_{z0}, z_0, M et g.

b. Déterminer et résoudre l'équation du mouvement de l'étage inférieur. Quelle est sa trajectoire?

c. Donner l'expression de l'altitude maximale atteinte.

d. Donner l'expression du temps écoulé entre t_0 et le moment où l'étage atteint la surface de la mer.

☞ Nous considérons maintenant la situation où la force de frottement fluide n'est plus négligée. **on exprimera les résultats en fonction des données précédentes et de la grandeur** $\tau = \frac{M}{K\eta}$.



e. Déterminer et résoudre l'équation du mouvement selon la vitesse sur l'axe vertical z. *Indication: l'équation $\dot{x} + \alpha x = \beta$ admet comme solution générale $x(t) = \beta/\alpha + C\exp(-\alpha t)$ où C, α et β sont des constantes.*

f. En déduire l'expression de l'altitude.

g. Donner l'expression de la hauteur maximale $h_{\max}$, ainsi que le temps $t_{\max}$ pour l'atteindre.

h. Donner la valeur numérique de $t_{\max}$. Nous considérerons $M = 7 \cdot 10^4$ kg et $K\eta = 350$ kg s^{-1}. On utilisera que $\ln(1.75) \simeq 0.56$. Comparer cette valeur numérique au cas ballistique (sans frottement fluide).

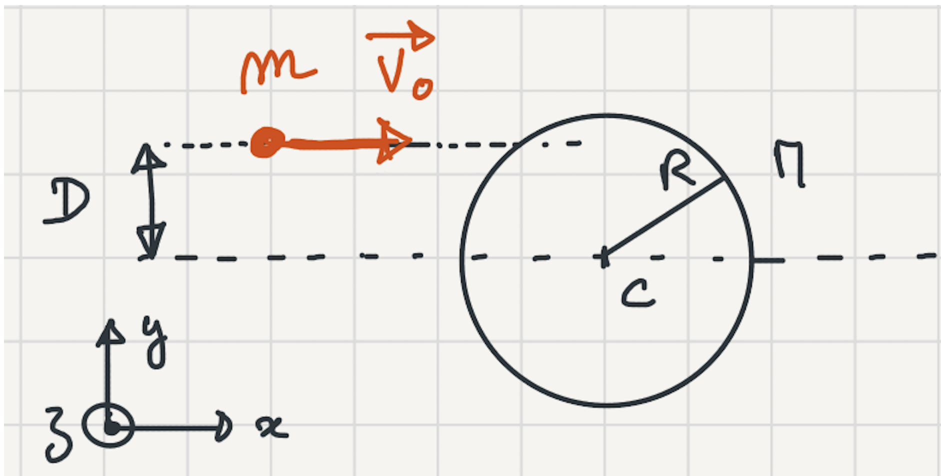
☞ Après avoir atteint sa hauteur maximale, on considère que l'effet des frottement le long de l'axe Ox a annulé la composante v_x. L'étage inférieur a donc une trajectoire verticale. Au temps t_a, ses moteurs s'allument afin de freiner sa course, et atterrir avec une vitesse nulle au niveau de la mer au temps t_b. La masse de la fusée varie donc avec le temps $M = M(t)$. On suppose que les moteurs expulsent du carburant à la vitesse constante $\vec{v}_e$ par rapport à la fusée.

i. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de l'étage inférieur entre t_a et t_b. (2 points + 1 point bonus)

Indication, pour ce faire, on prendra comme système la fusée à l'instant t, qui éjecte une masse dM durant dt, et on étudiera la variation de quantité de mouvement entre t et $t + dt$.

Exercice 2 Collisions spatiales (12 points)

Une planète, considerée comme une sphère homogène de rayon R et de masse M de centre C est supposée au repos (ni translation, ni rotation), dans un référentiel Galiléen $\mathcal{R}$ (O, x, y, z). Un astéroïde de masse m de de vitesse $v_0\vec{e}_x$ dans $\mathcal{R}$ entre en collision avec la planète, avec un paramètre d'impact D. La trajectoire de l'astéroïde avant le choc est dans le plan (C, x, y) contenant le centre C de la planète. On suppose v_0 assez grand pour pouvoir négliger l'effet de la gravitation entre les deux astres. On suppose la collision parfaitement inélastique. Après la collision, l'astéroïde reste collé à la surface de la planète à l'endroit de l'impact. On considère l'astéroïde comme une masse ponctuelle.



Les données du problème sont M, m, R, et v_0.

☞ On commence par supposer que $D = 0$

a. Calculer la vitesse dans $\mathcal{R}$ de la planète avec l'astéroïde collé après l'impact.

b. Calculer la perte d'énergie mécanique due à l'impact.

☞ On suppose maintenant que $D = R/2$. On appelle G le centre de masse du système planète + astéroïde.

c. Après le choc, l'axe (Gz) est un axe principal d'inertie pour l'ensemble planète + astéroïde. Justifier sans calcul pourquoi c'est le cas.

d. Calculer le vecteur $\overrightarrow{CG}$, ainsi que la distance $d = ||\overrightarrow{CG}||$, après le choc. On exprimera les vecteurs à l'aide des vecteurs de base $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

e. Décrire le mouvement de l'ensemble planète + astéroïde après le choc.

f. Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel lié au centre de masse G, avec les mêmes axes que $\mathcal{R}$. Justifier pourquoi $\mathcal{R}'$ est Galiléen.

g. Calculer le moment d'inertie I_G de l'ensemble planète + astéroïde autour de G après le choc.

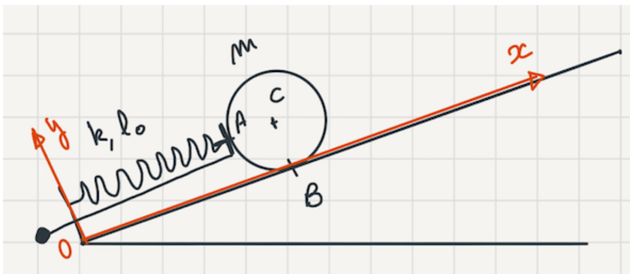
h. Montrer que le moment cinétique total par rapport à G du système planète et astéroïde avant le choc est le même dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

☞ On pourra, dans la suite, admettre le résultat de la question précédente.

i. Calculer la vitesse angulaire de rotation autour de G de l'ensemble astéroide + planète après le choc. On pourra utiliser I_G dans l'expression recherchée en plus des données du problème.

Exercice 3 Partie de flipper (12 points)

On étudie le mouvement d'une sphère homogène de rayon R, de masse m et de centre de masse C. Cette boule roule sans glisser sur un plan faisant un angle α avec l'horizontale. Un ressort sans masse de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k est fixé à l'origine O du repère; il reste en tout temps aligné avec $0x$ et peut seulement pousser sur la boule au point de contact A, sans frottement en ce point. La boule n'est pas fixée au ressort en A. Le ressort peut donc pousser la boule mais pas la tirer vers le bas. Le segment $[AC]$ est parallèle à l'axe (Ox). La position de la boule est repérée par celle de son centre de masse $x = x_C$. Un mécanisme (tige accessible de l'extérieur) permet de comprimer le ressort puis de le relâcher d'un coup afin de propulser la boule pour la lancer dans le jeu de flipper. On suppose que la compression du ressort est suffisante pour que la boule quitte le plan incliné et ne revienne pas sur le ressort.



☞ On comprime le ressort puis on lâche la tige.

a. Identifier toutes les forces s'exerçant sur la boule, les exprimer dans le repère donné, indiquer leurs points d'application et les dessiner. Indiquer quelles forces s'exercent lorsque $x < (l_0 + R)$ et quelles forces s'éxercent si $x \geq (l_0 + R)$.

b. Trouver l'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ de la boule. On distinguera les cas $x < (l_0 + R)$ et $x \geq (l_0 + R)$

c. Justifier le fait que l'énergie mécanique est conservée. Donner son expression. On distinguera les cas $x < (l_0 + R)$ et $x \geq (l_0 + R)$.

d. On considère dans cette question que le ressort n'est pas comprimé par l'opérateur, mais seulement par la sphère qui s'appuye dessus en A. Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ du centre de la sphère. Quelle est la condition sur le produit kl_0 pour que $x_{\text{éq}} > R$?

☞ Le ressort est maintenant comprimé au maximum par une force que nous n'étudions pas. On suppose que la longueur du ressort comprimé au maximum est nulle, ce qui revient à négliger cette longueur devant l_0. On le libère en $t = 0$ on a donc $x(0) = R$ et $\dot{x} = 0$.

e. Montrer que la condition pour que la boule perde contact avec le ressort en A au cours de son mouvement s'écrit $kl_0 \geq 2mg \sin\alpha$.

☞ On considère cette condition satisfaite pour la suite.

f. Quelle est la condition sur le coefficient de frottement statique μ_S entre la boule et le sol pour qu'il n'y ait effectivement pas de glissement ?

g. En quelle position la vitesse absolue du centre de la boule est-elle maximale ?

h. Montrer que l'abscisse maximale atteinte par la boule vaut $x_{\max} = R + \frac{kl_0^2}{2mg \sin\alpha}$