SV Physique I - 10

C. Hébert
LSME-IPHYS-SB-EPFL
Cecile.hebert@epfl.ch

26 novembre 2020

Plan du cours

X. Dynamique du solide indéformable

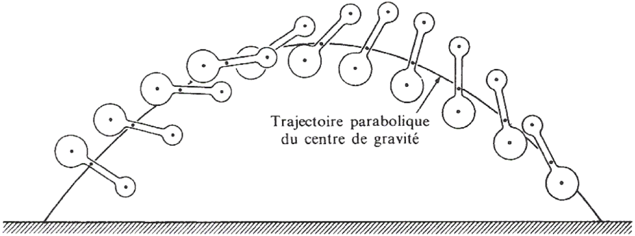
X-1. Introduction. Du système de points au solide indéformable.

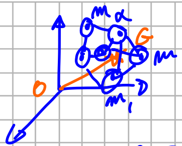
Un solide indéformable peut avoir un mouvement

– de translation

– de rotation

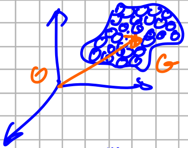
Il va falloir mettre de nouveaux concepts en place pour le mouvement de rotation !





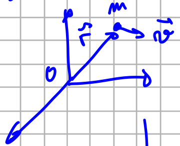
$$\vec{OG} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M} \qquad \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \qquad \vec{P}_{tot} = M\vec{v}_G$$

$$M = \sum_\alpha m$$



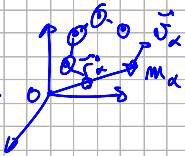
$$\vec{OG} = \frac{\int_{vol} \vec{r}\,.\,dm}{M} = \frac{\int_{vol} \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,dV}{M} = \frac{\iiint_{x,y,z} \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,dV}{M}$$

analyse II



$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\sum \vec{\Omega}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$



$$\vec{L}_O^{tot} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge (m_\alpha \vec{v}_\alpha) \Rightarrow \vec{L}_O = \int_{vol} d\vec{L}_O$$

$$\sum \vec{\Omega}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}^{tot}}{dt} \qquad \sum \vec{\Omega}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

Quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

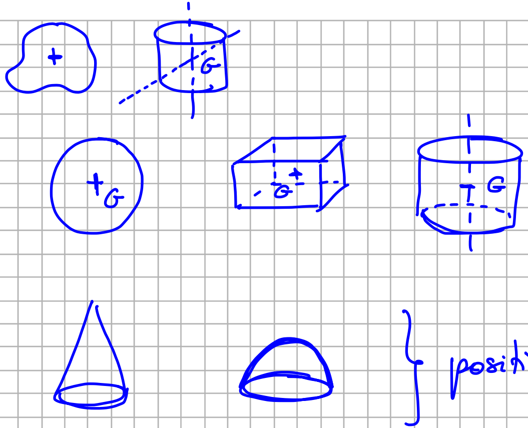
$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

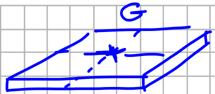
X-2. Centre de masse d'un solide

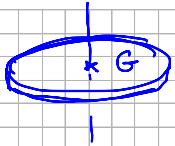
Important dans tous les cas : le poids s'applique au centre de masse.



Pour des solides homogènes
le centre de masse est sur
le (les) axe(s) de symétrie

position donnée.

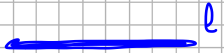




objets à deux dimensions

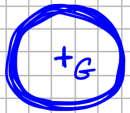
masse surfacique ρ_s

$M = S \rho_s$



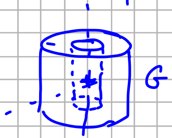
$M = \rho_\ell \ell$

ρ_ℓ masse linéique

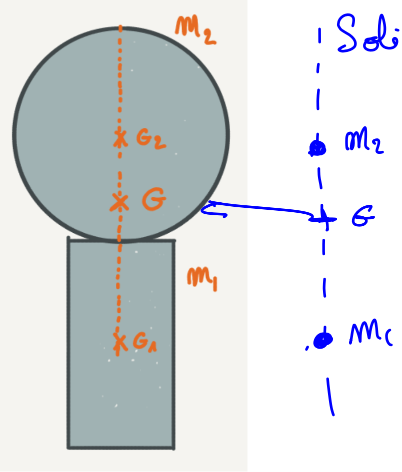


→ le centre de masse n'est pas forcément dans le solide

anneau mince



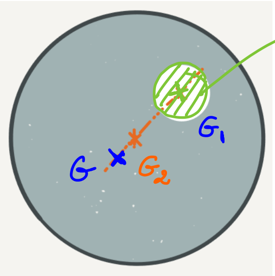
Superposition de deux solides :



Solide total centre de masse : G

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG_1} + m_2 \vec{OG_2}}{m_1 + m_2}$$

solide à trou — masse m — centre de masse G



bouchon m_1
centre de masse G_1

solide bouché masse m_2
centre de masse G_2

$$m_2 = m + m_1$$

$$\vec{OG_2} = \frac{m\vec{OG} + m_1\vec{OG_1}}{m + m_1}$$

$$m\,\vec{OG} = m_2\vec{OG_2} - m_1\vec{OG_1}$$

$$\vec{OG} = \frac{m_2\vec{OG_2} - m_1\vec{OG_1}}{m}$$

Chercher le c.d.m. entre le solide sans trou et un "trou" de masse négative égale à la masse enlevée au solide.

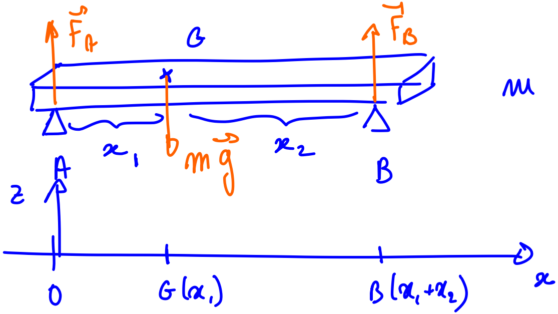
X-3. Statique

$\vec{a}_G = \vec{0} \qquad \vec{L}_O = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$

Les conditions sont alors :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{0}$$

Exemple : poutre (non homogène !) de masse m sur 2 supports. Déterminer les forces F_A en A et F_B en B exercées par les supports



$\sum \vec{F} = \vec{0} \qquad \vec{F}_A + \vec{F}_B + m\vec{g} = \vec{0}$

$F_A \vec{e}_z + F_B \vec{e}_z - mg\,\vec{e}_z = \vec{0}$

$F_A + F_B - mg = 0$

$\sum \vec{\mathcal{M}}_A = \sum \vec{\mathcal{M}}_G = \sum \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$

en B : $\sum \vec{\sigma}_B = \vec{BA} \wedge \vec{F_A} + \vec{BG} \wedge m\vec{g} + \cancel{\underbrace{\vec{BB}}_{\vec{0}} \wedge \vec{F_B}} = \vec{0}$

$= -(x_1+x_2)\vec{e_x} \wedge F_A \vec{e_y} + (-x_2)\vec{e_x} \wedge (-mg\vec{e_y}) = \vec{0}$

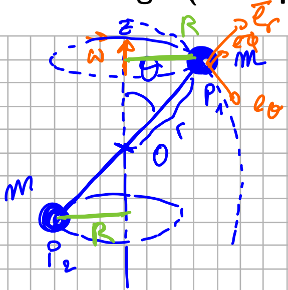
$= -F_A(x_1+x_2)\vec{e_z} + mg\, x_2\, \vec{e_z} = 0$

$F_A(x_1+x_2) = mg\, x_2 \Rightarrow$

$$F_A = mg\frac{x_2}{x_1+x_2}$$

$$F_B = mg\frac{x_1}{x_1+x_2}$$

X-4. Energie (cinétique) de rotation



$\vec{\omega} = \vec{cte} = \omega \vec{e_3}$

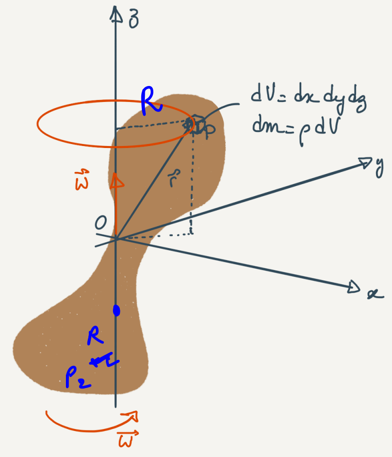
des masses ont un mouvement circulaire uniforme

$\vec{OP_1} = r\vec{e_r}$ $\qquad R = r\sin\theta \qquad \vec{v_1} = R\omega\vec{e_\varphi}$

masse 1 $\quad E_{c,1} = \frac{1}{2} m (R\omega)^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$

masse 2 $\quad E_{c,2} = \frac{1}{2} m (R\omega)^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$

$E_{c,rot} = E_{rot} = \frac{1}{2} (2mR^2) \omega^2$



Chaque "morceau" du solide décrit un cercle autour de l'axe Oz à la vitesse $R\omega$ avec R : distance P – axe

morceau de solide : volume dV

masse $dm = \rho(\vec{r}).dV$

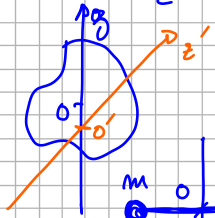
$$dE_{c,rot} = \frac{1}{2} dm\,(R\omega)^2 = \frac{1}{2}\rho(\vec{r})\,dV\,R^2\omega^2$$

$$E_{c,rot} = \int_{vol} \frac{1}{2}\rho(\vec{r})\,dV\,R^2\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\int_{vol} R^2\rho(\vec{r})\,dV}_{\text{Moment d'inertie du solide par rapport à } Oz}$$

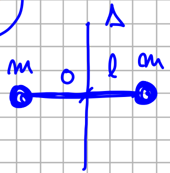
X-5. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

$E_{c,rot} = \frac{1}{2}\omega^2 I_{Oz}$

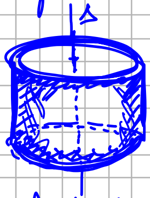
$I_{Oz} = \int_{vol} R^2 \rho(r)\, dV$ moment d'inertie par rapport à Oz



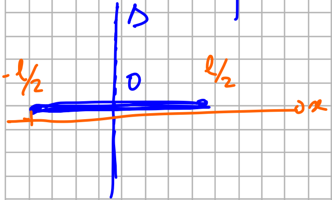
Cette grandeur dépend du solide et de l'axe



$I_\Delta = 2ml^2$



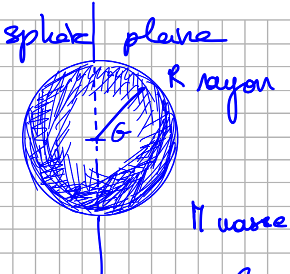
Cylindre creux masse M rayon R $I_\Delta = MR^2$



tige de longueur l et de masse M entre $x = -\frac{l}{2}$ et $x = +\frac{l}{2}$

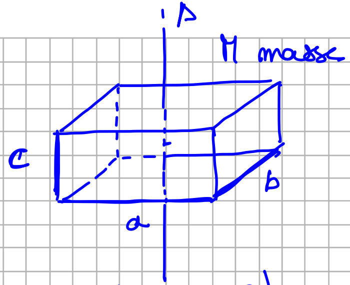
$$I_\Delta = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \rho_l\, dx = \rho_l \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{M}{\cancel{l}} \cdot \cancel{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{\cancel{l^3}\,l^2}{\cancel{8}\,4} = \frac{1}{12} M l^2$$

Solides usuels

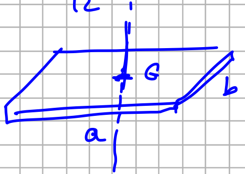


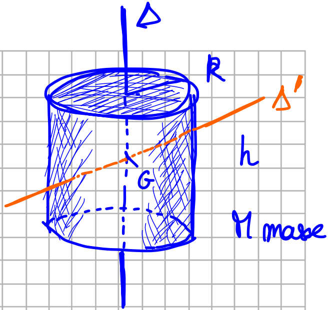
axe passant par G

$$I_\Delta = \frac{2}{5} M R^2$$



$$I_\Delta = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$





$$I_\Delta = \frac{1}{2} M R^2$$

Δ' perpendiculaire à Δ passant par G

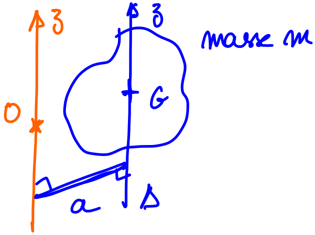
$$I_{\Delta'} = \frac{1}{4} M \left[R^2 + \frac{h^2}{3}\right]$$

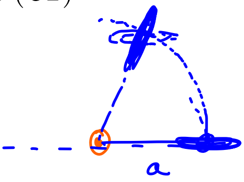
Théorème de Steiner :

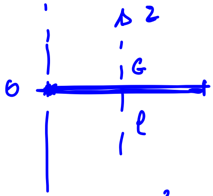
Si on a deux axes *parallèles* (Oz) et (Gz) distants de a, avec G centre de masse. Si I_{Gz} est le moment d'inertie par rapport à (Gz) alors

$$I_{Oz} = I_{Gz} + ma^2$$

I_{Oz} moment d'inertie par rapport à (Oz)

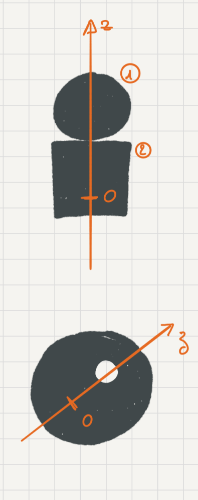






$$I_{Oz} = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} m \ell^2$$
$$= m\ell^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3} m\ell^2$$

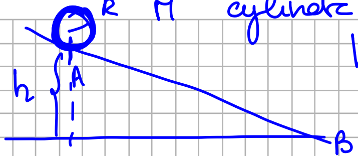
Solides composés et solides à trous



$$I_{Oz}^{\text{total}} = I_{Oz}^{1} + I_{Oz}^{2}$$

$$I_{Oz}^{\text{solide à trou}} = I_{Oz}^{\text{solide bouché}} - I_{Oz}^{\text{bouchon}}$$

Application



R M cylindre creux lâché sans vitesse initiale en haut d'un plan incliné. Roule sans glisser

v_B en fonction de h + autres paramètres

Conservation de l'énergie mécanique $E_m = E_p^g + E_{c,trans} + E_{c,rot} = cte$

$$E_{m\,A} = E_{m,B} \Rightarrow E_{p,A} + E_{c,trans\,A} + E_{c\,rot\,A} = E_{p\,B} + E_{c\,trans\,B} + E_{c\,rot,B}$$

$$\Rightarrow Mgh + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} I_{G_3} \omega_B^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} I_{G_3} \omega_B^2 \qquad I_{G_3} = MR^2 \qquad \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \omega_B = \frac{v_B}{R}$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} M \cancel{R^2} \frac{v_B^2}{\cancel{R^2}} = M v_B^2 \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{gh}} < \sqrt{2gh} \text{ pont matériel !}$$

X-6. Moment cinétique d'un solide.

Rappel : quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

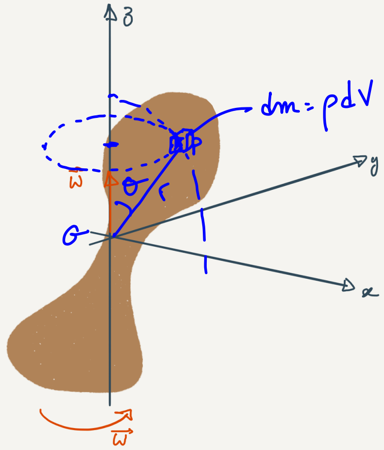
$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

O fixe dans le référentiel

Soit un solide en rotation autour d'un axe passant pa G. On place l'axe (Gz) de manière que ce soit l'axe de rotation. Le vecteur rotation est alors $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$



$$\vec{v} = r \sin\theta \, \omega \, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{dp} = dm \, \vec{v} \quad dm \, r \sin\theta \, \omega \, \vec{e}_\varphi$$

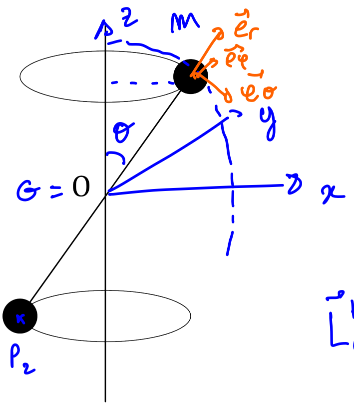
$$d\vec{L}_G = \vec{r} \wedge \vec{dp} = r \vec{e}_r \wedge (dm \, r \sin\theta \, \omega \, \vec{e}_\varphi)$$

$$= dm \, r^2 \sin\theta \, \omega \, (-\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L}_G = \int_{\text{volume}} d\vec{L}_G \Rightarrow ??$$

Solide simplifié

Cas simple : "haltère" en rotation, dont la tige a une masse négligeable.



$\vec{r} = r\,\vec{e}_r$

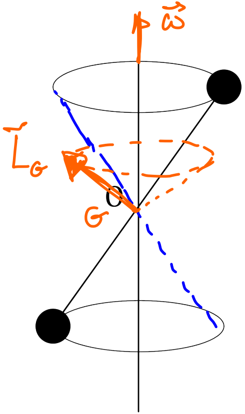
$\vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\varphi = r\sin\theta\,\omega\,\vec{e}_\varphi$

$\vec{L}_G^{(1)} = r\vec{e}_r \wedge (m r \sin\theta\,\omega\,\vec{e}_\varphi) = m r^2 \sin\theta\,\omega(-\vec{e}_\theta)$

$\vec{L}_G^{(2)} = \underbrace{\vec{OP}_2}_{-\vec{OP}_1} \wedge m \underbrace{\vec{v}_2}_{-\vec{v}_1} = \vec{L}_G^{(2)} = \vec{OP}_1 \wedge m\vec{v}_1 = \vec{L}_G^{(1)}$

$\vec{L}_G^{tot} = 2 m r^2 \sin\theta\,\omega(-\vec{e}_\theta)$

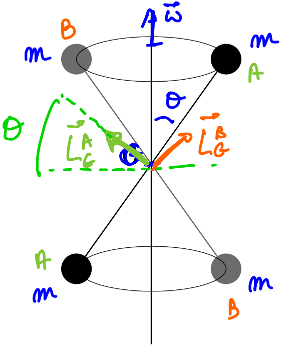
$2m = M$ masse totale du solide



Lorsque le solide tourne autour de (Gz) le moment cinétique $\vec{L}_G$ varie (sa direction change).

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_G^{ext} = \frac{d\vec{L}_G}{dt} \neq \vec{0}$$

En général, le moment cinétique n'est pas parallèle à l'axe de rotation. Sauf si il y a une certaine symétrie dans la répartition de la masse :



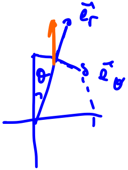
$M = 4m$

$\vec{L}_G^A = 2mr^2\sin\theta\,\omega\,(-\vec{e}_\theta)$

$\vec{L}_G = \vec{L}_G^A + \vec{L}_G^B$

$\vec{L}_G^{(A)} \cdot \vec{e}_3$

$= \left(2\vec{L}_G^{(A)} \cdot \vec{e}_3\right)\vec{e}_3 = 2\,(2mr^2\sin\theta\,\omega)\left(-\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_3\right)\vec{e}_3$



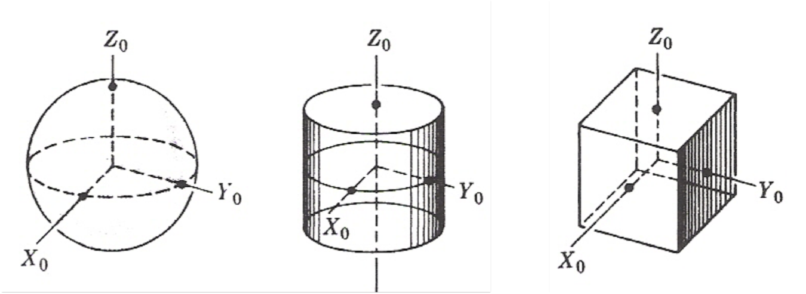
$\vec{e}_3 = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \Rightarrow \left(-\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_3\right) = \sin\theta$

$\vec{L}_G = 4mr^2\sin^2\theta\,\omega = M R^2 \omega\,\vec{e}_3 = MR^2\vec{\omega}$

Dans certains cas $\vec{L}_G / / \vec{\omega}$. Alors : $\vec{L}_G = I_{Gz}\vec{\omega}$

$\vec{L}_G = I_{G_3}\vec{\omega}$

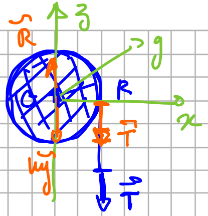
Exemples de cas symétriques :



Un axe du solide tel que une rotation autour de cet axe (Gz) donne $\vec{L}_G = I_{Gz}\vec{\omega}$ s'appelle axe principal d'inertie

Tout solide admet au moins 3 axes principaux d'inertie

Exemple



poulie disque plein homogène G : cdm rayon R
masse M Poulie fixée par son axe
corde inextensible et sans masse
initialement : poulie immobile $\vec{T}$ durant t_0. Quelle est la longueur de corde déroulée ?

(G, x, y, z) Forces $\vec{T}$, $m\vec{g}$ $\vec{R}$ $\quad \sum \vec{\mathcal{M}}_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \underbrace{\cancel{\vec{GG} \wedge m\vec{g}}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\vec{GG} \wedge \vec{R}}}_{\vec{0}} + \vec{GA} \wedge \vec{T}$

$\sum \vec{\mathcal{M}}_G = R\vec{e_x} \wedge -T\vec{e_z} = RT\vec{e_y}$.

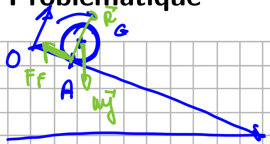
$\vec{\omega} = \omega \vec{e_y}$ $\quad Gy$ axe principal d'inertie $\quad I_{Gy} = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow \vec{L}_G = \frac{1}{2}MR^2\omega\vec{e_y}$

$\frac{d}{dt}\vec{L}_G = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega}\vec{e_y} = RT\vec{e_y} \Rightarrow T = \frac{1}{2}MR\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{2T}{MR} \Rightarrow \omega(t) = \frac{2T}{MR}t$

$\theta(t) = \frac{T}{MR}t^2 \qquad \theta(t_0) = \frac{Tt_0^2}{MR} \qquad l = R\theta(t_0) = \frac{\cancel{R}Tt_0^2}{M\cancel{R}} \qquad \boxed{l = \frac{T}{M}t_0^2}$

X-7. Solide qui roule

Problématique



$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{OAG} = \frac{d\vec{L}_{OAG}}{dt}$$ point fixe de $\mathcal{R}$ ~~A~~ ~~G~~ O

$\vec{L}_{\cancel{O}AG} = \cancel{I_O}_{AG}\,\vec{\omega}$ $\qquad \vec{L}_G = I_{G_3}\vec{\omega}$ A G ~~O~~

$\vec{L}_X = I_{X_3}\vec{\omega}$ fonctionne si $X \equiv G$ ou si X un point lié au solide à vitesse nulle cela marche pour A

la contrainte $\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ pour O fixe est trop limitante!

Parfois, on souhaite utiliser un point *non fixe* pour étudier le mouvement.

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_A \overset{?}{=} \frac{d\vec{L}_A}{dt} \qquad A \text{ quelconque ?}$$

O fix dans $\mathcal{R}$ $\quad \sum \vec{\mathcal{M}}_O = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt}$ OK $\qquad$ A non fixe

$$\vec{L}_A = \int_{vol} \vec{AP} \wedge dm\, \vec{v}_R(P) = \int_{vol} (\vec{AO} + \vec{OP}) \wedge dm\, \vec{v}_R(P) = \int_{vol} \vec{AO} \wedge \vec{v}_R(P)\, dm + \underbrace{\int_{vol} \vec{OP} \wedge \vec{v}_R(P)\, dm}_{\vec{L}_O}$$

$$= \vec{AO} \wedge \int_{vol} \vec{v}_R(P)\, dm + \vec{L}_O = \vec{AO} \wedge M \vec{v}_R(G) + \vec{L}_O$$

$$\vec{L}_A = -\vec{OA} \wedge M \vec{v}_R(G) + \vec{L}_O \qquad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\frac{d\vec{OA}}{dt} \wedge M \vec{v}_G + (-\vec{OA}) \wedge M \frac{d}{dt}\vec{v}_R(G) + \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -M \vec{v}_R(A) \wedge \vec{v}_R(G) - \vec{OA} \wedge M \vec{a}_R(G) + \sum \vec{\mathcal{M}}_O$$

$$= -M \vec{v}_R(A) \wedge \vec{v}_R(G) - \vec{OA} \wedge \sum \vec{F}^{ext} + \sum \vec{OP}^{F}_{app} \wedge \vec{F}$$

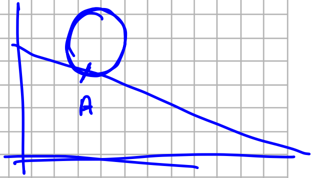
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -M\,\vec{v}_R(A) \wedge \vec{v}_R(G) - \vec{OA} \wedge \sum \vec{F}^{ext} + \sum \vec{OP}^{F}_{app} \wedge \vec{F}^{ext}$$

$$+ \sum \vec{AO} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{OP}^{F}_{app} \wedge \vec{F}^{ext}$$

$$+ \underbrace{\sum \left(\vec{AP}^{F}_{app}\right) \wedge \vec{F}^{ext}}_{\vec{\mathcal{M}}_A}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A - M\,\vec{v}_R(A) \wedge \vec{v}_R(G)$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } A \text{ est fixe} \\ \text{ou} \\ \text{Si } A \equiv G \\ \text{Si } \vec{v}_R(A) \text{ colinéaire } \vec{v}_R(G) \end{array} \right.$$



En résumé :

Pour pouvoir utiliser

$$\vec{M}_A^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t}$$

Il faut que A soit fixe dans le référentiel, ou confondu avec le c.d.m. ou se déplace à une vitesse colinéaire à celle du c.d.m.

G

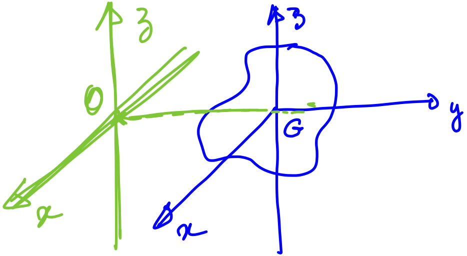
Pour pouvoir calculer $\vec{L}_A$ avec $\vec{L}_A = I_{Az}\vec{\omega}$ $\vec{\omega}$ vecteur rotation autour de (Az)

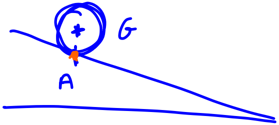
Il faut que (Az) soit un axe principal d'inertie

ET que

$A = G$ OU A est un point du solide à vitesse nulle.

(O, x, y, z) peuvent-ils être axes principaux d'inertie ?

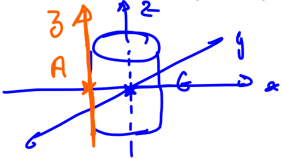




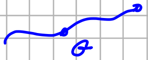
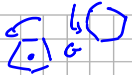
Oui, si (G, x, y, z) sont axes principaux d'inertie et si O appartient à un axe principal d'inertie.

Dans ce cas, pour une rotation autour de (Oz) :

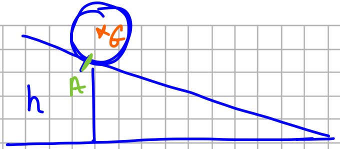
$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ et $\vec{L}_O = I_{Oz} \vec{\omega}$.



Comparaison translation / rotation

Translation	Rotation
	
$\vec r$, $\vec v$, $\vec a$	θ , ω , $\dot\omega = \alpha$
	$\vec\omega$, $\dot{\vec\omega} = \vec\alpha$
m	I_Δ
$\vec F$ Forces	$\vec\Omega_O^{\text{Forces}}$
$\sum \vec F = m\vec a_G = \frac{d}{dt}\vec p$	$\sum \vec\Omega_O = \frac{d\vec L_O}{dt}$
$\vec p = m\vec v_G$	$\vec L_O$ $\quad (\vec L_O = I_\Delta \vec\omega)$
$\frac{1}{2} m v^2$	$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

Exo à faire qui sera corrigé en amphi.

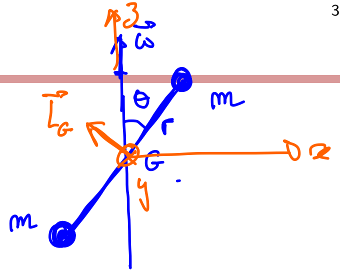


Un cylindre roule sur un plan incliné

$\vec{v}_G(t)$?

$x_G(t)$

$\sum \vec{\Omega}_{AG} = \dfrac{d\vec{L}_{AG}}{dt}$



X-8. Tenseur d'inertie (hors programme)

Cas ou l'axe de rotation passe par G, centre de masse :

En fait, de manière générale :

$$\vec{L}_G = \underline{I}_G \vec{\omega}$$

avec :

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \int (y^2+z^2)\,dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int yxdm & \int (x^2+z^2)\,dm & -\int yzdm \\ -\int zxdm & -\int zydm & \int (x^2+y^2)\,dm \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (r\cos\theta)^2 M & 0 & -Mr^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -Mr^2\sin\theta\cos\theta & 0 & M(r\sin\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$\underline{I}$ est le tenseur d'inertie, il dépend de l'origine et des axes choisis.