Solutions

Solution 1

1. $\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$
2. $\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$
3. $\frac{d}{dt}\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}^{*} = \frac{\cos(t)\cos(t)+\sin(t)\sin(t)}{\cos(t)^2} = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$
4. $\frac{d}{dt}\ln(t) = \frac{1}{t}$
5. $\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}}$
6. $\frac{d}{dt}t^{\alpha} = \alpha t^{\alpha-1}$
7. $\frac{d}{dt}\sin(t)\cos(t) = \sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
8. $\frac{d}{dt}t\cos(t) = \cos(t) - t\sin(t)$
9. $\frac{d}{dt}t\cos(t)\sin(t)^{**} = \cos(t)\sin(t) - t\sin^2(t) + t\cos^2(t)$
10. $\frac{d}{dt}\sin(t^2) = 2t\cos(t^2)$

$*(\frac{f}{g})' = (f\cdot\frac{1}{g})' = f\cdot(\frac{1}{g})' + f'\cdot\frac{1}{g} = f(\frac{-g'}{g^2}) + \frac{f'}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

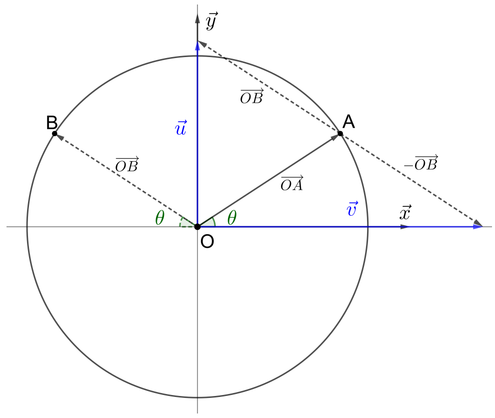
$**(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

Solution 2

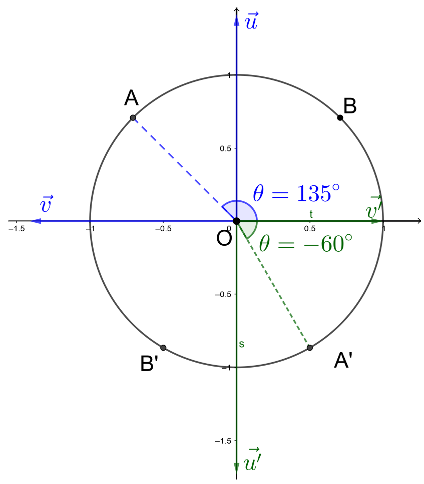
a) $\overrightarrow{OA} = R\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = R\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = R\begin{pmatrix}0\\ 2\sin\theta\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = R\begin{pmatrix}2\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$

b)



d)

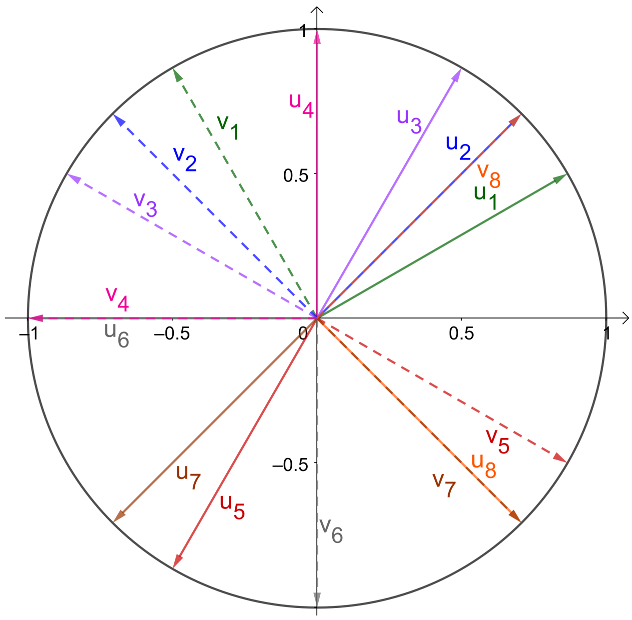


Solution 3

1. $\frac{d}{dt}\cos(\theta) = -\omega \sin\theta$
2. $\frac{d}{dt}\sin(\theta) = \omega \cos\theta$
3. $\frac{d}{dt}\tan(\theta) = \frac{\omega}{\cos^2\theta} = \omega(1+\tan^2\theta)$
4. $\frac{d}{dt}e^{i\theta} = i\omega e^{i\omega t} = i\omega e^{i\theta}$
5. $\frac{d}{dt}\sin(\theta)\cos(\theta) = \omega\cos^2\theta - \omega\sin^2\theta = \omega(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

Solution 4

a)



b) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

c) Deux vecteurs sont perpendiculaires si leur produit scalaire vaut zéro :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta = 0$

Solution 5

1. L'analyse dimensionnelle donne, avec les unités suivantes :
   accélèration : m·s^{-2}
   vitesse : m·s^{-1}
   temps : s
   position : m

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ \mathrm{m} &= \underbrace{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot(\mathrm{s})^2}_{m} + \underbrace{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot(\mathrm{s})}_{\mathrm{m}} + \underbrace{\mathrm{m}}_{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

2. ☣ Attention ! Il est important que <u>tous</u> les termes de la somme donnent des mètres.
   (a) $\frac{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}} \Rightarrow \mathrm{s}^{-1} \neq \mathrm{m}$ non
   (b) $\frac{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}} \Rightarrow \mathrm{s} \neq \mathrm{m}$ non
   (c) $\frac{\mathrm{m^2\cdot s^{-4}}}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}} \Rightarrow \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-3} \neq \mathrm{m}$ non
   (d) $\frac{\mathrm{m^2\cdot s^{-2}}}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}} \Rightarrow \mathrm{m}$ oui !
   C'est donc (d)

Solution 6

1. $\frac{d}{dt}\cos(\theta) = \frac{d\theta(t)}{dt}(-\sin(\theta(t)) = -\dot\theta\sin(\theta)$
2. $\frac{d}{dt}\sin(\theta) = \dot\theta\cos(\theta)$
3. $\frac{d}{dt}\tan(\theta) = \frac{\dot\theta}{\cos^2(\theta)} = \dot\theta(1+\tan^2(\theta))$
4. $\frac{d}{dt}\ln(\theta) = \frac{\dot\theta}{\theta}$
5. $\frac{d}{dt}e^{i\theta} = i\dot\theta e^{i\theta}$
6. $\frac{d}{dt}\sin(\theta)\cos(\theta) = \dot\theta\cos^2(\theta) - \dot\theta\sin^2(\theta) = \dot\theta(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$
7. $\frac{d}{dt}\theta^\alpha = \alpha\dot\theta\theta^{\alpha-1}$
8. $\frac{d}{dt}\theta\cos(\theta)\sin(\theta) = \dot\theta\cos(\theta)\sin(\theta) - \theta\dot\theta\sin^2(\theta) + \theta\dot\theta\cos^2(\theta)$

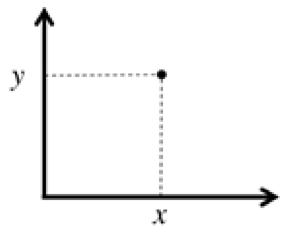
Solution 7

a) $\overrightarrow{OM} = R\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$; $\vec{P} = P\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$; $\vec{T} = T\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$

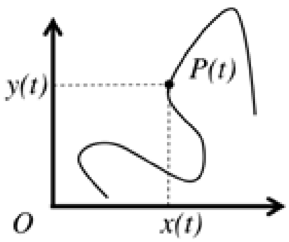
b) $\vec{P} = P\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$; $\vec{T} = T\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$

Solution 8

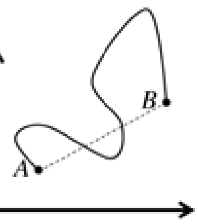
a) Deux paramètres sont nécessaires pour repérer la position d'un point sur une table, par exemple les coordonnées x et y dans un repère orthonormé. On dit que le problème est à deux dimensions : « 2D ». Notez que le terme « dimension » fait ici référence aux dimensions spatiales, notion qui diffère de celle vue dans l'exercice 1.



b) Le mouvement est décrit par la donnée des deux coordonnées en fonction du temps, x(t) et y(t).



c) Dans notre repère 2D, la distance entre A et B est : $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Comme on le voit sur le schéma ci-dessous, cette valeur est plus petite que la distance parcourue par P (c'est la même uniquement si le trajet en ligne droite).



d) la vitesse entre A et B est : $v_{AB} = \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\Delta t}$, où Δt est le temps de trajet de A à B . C'est une vitesse moyenne. Il n'y a pas relation à priori entre cette vitesse moyenne v_{AB} et les vitesses instantanées v_A et v_B. Par exemple, on peut imaginer que P parte à l'arrêt de A et s'arrête en B, avec une vitesse moyenne non nulle...