Physique Générale « Mécanique »

Examen du 20 janvier 2023, 9:15 – 12:45

Veuillez rédiger vos réponses dans le cahier ci-joint.
Le cahier ne doit pas être dégrafé. Seul le cahier est ramassé et corrigé.

Dans tous les exercices, sauf indication contraire, les résultats sont à exprimer en fonction des données fournies et des constantes physiques connues.

Chaque réponse doit être justifiée dans le cadre prévu à cet effet (une page blanche supplémentaire est disponible à la fin de chaque exercice si nécessaire).

Le sujet de l'examen comprend 4 exercices.

Seul document autorisé : une page de notes A4 recto/verso. Pas de calculatrice ; pas de téléphone.

Formulaire :

Coordonnées polaires :

$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

Coordonnées cylindriques :

$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$

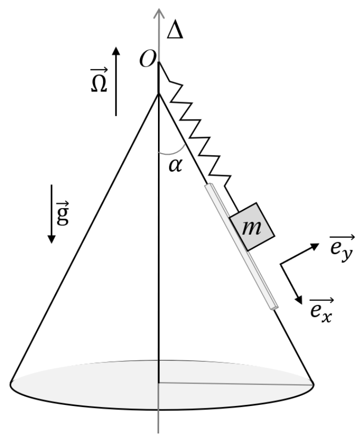
$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$

Coordonnées sphériques

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$

$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$

Exercice 1 (0,9 point) : Le cône et le ressort



Un cône de demi-angle au sommet α peut tourner autour d'un axe principal d'inertie Δ passant par son sommet et son centre de masse. Au sommet du cône, une tige (de longueur négligeable) permet de fixer au point O un ressort sans masse, de constante de raideur k, et de longueur l_0 au repos. A l'autre extrémité du ressort est attachée une masse m, comme sur le schéma ci-contre. Cette masse sera considérée comme un point matériel. La masse m peut glisser sans frottement dans un rail qui guide son déplacement. Le système est soumis au champ de pesanteur.

Le cône est immobile (pas de rotation).

1a Calculez la position d'équilibre x_{eq} de la masse m par rapport au point d'attache du ressort (O).
1b Exprimez l'énergie mécanique du système « ressort + masse » en fonction de x et $\dot{x}$.
1c Déterminez l'équation du mouvement de la masse m et donnez la forme générale des solutions.

Le cône est maintenant en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante. La masse m étant guidée par le rail, elle tourne aussi à la vitesse $\vec{\Omega}$.

Dans un premier temps, la masse reste au contact avec le rail et atteint une nouvelle position d'équilibre sous l'effet de la rotation.

1d Calculez le déplacement selon Ox de la masse m par rapport à sa position d'équilibre (x_{eq}).

Dans un second temps, la vitesse de rotation du cône est telle que la masse m n'est plus en contact avec le cône.

1e Déterminez Ω_0 la vitesse angulaire maximale pour que la masse reste au contact du cône. On considèrera pour calculer Ω_0 que l'allongement selon Ox est négligeable ($x \approx x_{eq}$).

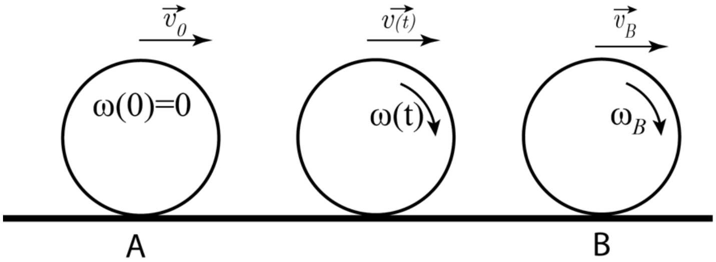
On fixe la vitesse angulaire à une valeur inférieure à Ω_0 et on déplace la masse m hors de sa position d'équilibre. On la lâche et elle se met à osciller.

1f Faites un schéma du système où vous indiquerez les forces de Coriolis et centrifuge au cours d'une période d'oscillation de la masse m, c'est-à-dire quand la masse se déplace suivant $\overrightarrow{e_x}$ et suivant $-\overrightarrow{e_x}$.

Exercice 2 (1,4 points) : Bowling

On veut analyser le mouvement d'une boule de bowling de masse m de rayon R et ayant un moment d'inertie I, avec $I = \frac{2}{5}mR^2 = \beta mR^2$.

La boule est initialement lancée sur la piste avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ sans rebond. Elle glisse sans frottement jusqu'au point A. A partir de A, elle continue à glisser mais avec un frottement avec la piste qui la met en rotation. On pose $t = 0$ en A. La boule arrive ensuite en B à un temps t_B où elle se met à rouler sans glissement avec une vitesse angulaire ω_B.



On suppose dans un premier temps que la boule est <u>un point matériel</u> qui glisse avec un frottement sec entre A et B. Le coefficient de frottement est μ_d.

2a Exprimez v_B en prenant soin de faire apparaître le temps t_B dans l'expression.

2b Calculez le travail de la force de frottement entre A et B.

On considère maintenant le cas réaliste de la phase de « glissement – roulement » entre A et B. La boule n'est plus considérée comme un point matériel.

2c Quelle est la relation entre v_B, vitesse du centre de masse de la boule, et $\omega_B = \omega(t_B)$ au point B ?

2d Déterminez l'expression de $\omega(t)$, avec comme condition initiale $\omega(0) = 0$ au point A.

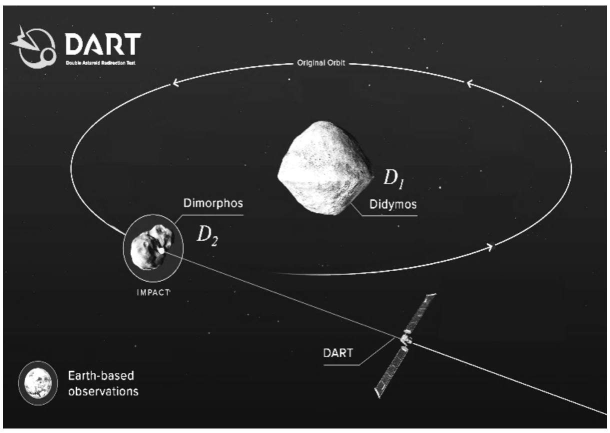
2e Quel est le temps t_B au bout duquel la boule se met à rouler sans glissement ?

2f Déterminez la vitesse v_B en fonction de la vitesse initiale v_0 et du coefficient β.

2g Calculez l'énergie dissipée par la force de frottement entre A et B.

Exercice 3 (1,6 points) : Mission DART

En septembre 2022, la mission DART (Double Asteroid Redirection Test) a testé la possibilité de dévier la trajectoire d'un astéroïde. Le but de cette mission était de pouvoir vérifier qu'il est possible de dévier un "géocroiseur", c'est à dire un astéroïde dont la trajectoire intercepte celle de la Terre, en le percutant avec un satellite artificiel envoyé depuis la Terre.



Nous allons étudier dans cet exercice certains aspects de cette mission. Le système choisi pour le test est constitué d'un astéroïde principal Didymos, appelé D_1 de rayon R_1 et de masse M_1, autour duquel tourne un plus petit astéroïde Dimorphos, appelé D_2 de rayon R_2 et de masse M_2. D_2 tourne autour de D_1 sur une orbite circulaire de rayon r_0 avec une période T_0.

3a En utilisant la 2ème loi de Newton, trouvez l'expression de la masse M_1 en fonction des données du problème.

3b En supposant que la masse volumique des deux astéroïdes est identique, calculez la masse M_2 en fonction de la masse M_1 et des rayons R_1 et R_2. On suppose que les deux astéroïdes sont des sphères homogènes.

Dans ce qui suit, on supposera les masses M_1 et M_2 connues (elles deviennent par conséquent des données de l'énoncé). Pour la suite des calculs, on se place dans le référentiel de l'astéroïde D_1 avec un repère R dont l'origine est au centre de D_1.

3c Calculez la vitesse orbitale v_0 de D_2 dans R.

Un satellite de masse m_s est envoyé depuis la Terre et doit entrer en collision avec D_2. Il arrive dans le référentiel de l'astéroïde D_1 avec une vitesse $\overrightarrow{v_s}$ tangentielle à l'orbite de D_2. On suppose que le choc est parfaitement frontal (dans ce cas, on peut considérer les objets comme ponctuels) et que les deux vecteurs vitesses $\overrightarrow{v_s}$ et $\overrightarrow{v_0}$ sont de sens opposé.

3d Exprimez la nouvelle vitesse v_1 de D_2 après le choc, que l'on suppose parfaitement inélastique (choc mou).

En fait, une hypothèse raisonnable est de supposer qu'une petite quantité de matière est éjectée lors du choc. Cette quantité de matière de masse m_e (avec $m_e << M_2 + m_s$) est éjectée à la vitesse $\overrightarrow{v_e}$ (dans le repère R) dans une direction parfaitement opposée à $\overrightarrow{v_s}$.

3e Calculez v_2 la nouvelle vitesse de D_2 après le choc dans ce cas.

3f La vitesse v_2 est-elle plus petite ou plus grande que v_1? Justifiez.

Le défi pour la mission DART est de réussir à mesurer v_2 afin d'en déduire les caractéristiques du choc. Depuis la Terre, il est possible de mesurer la nouvelle période orbitale T_2 de l'ensemble « D_2 + Satellite ». L'orbite est maintenant elliptique. On appelle r_2 la plus petite distance entre D_2 et D_1 sur cette orbite. On rappelle que la 3ème loi de Kepler énonce que le carré des périodes est proportionnel au cube des demi-grands axes.

3g Tracez l'allure de la nouvelle trajectoire en indiquant le point correspondant au choc (dans ce schéma, vous dessinerez aussi la trajectoire circulaire avant le choc).

3h Calculez r_2 en fonction de r_0, T_0 et T_2.

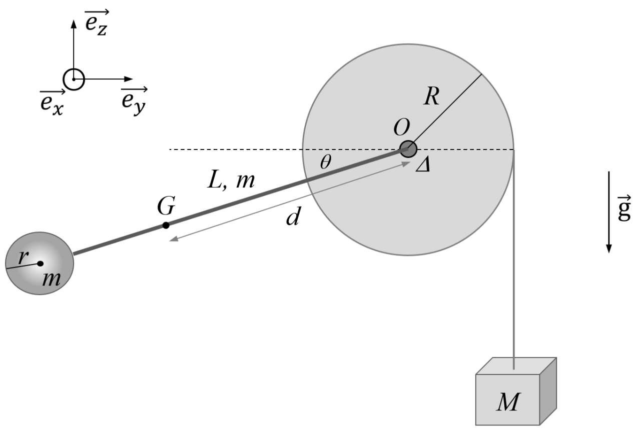
3i Exprimez la vitesse v_2' lorsque D_2 est à la distance r_2 de D_1.

3j Déterminez v_2 en fonction de G, r_0, r_2 et M_1.

3k Représentez sur un même schéma les diagrammes d'énergies potentielles effectives pour les trajectoires avant et après le choc. On indiquera aussi sur le schéma r_0 et r_2, ainsi que les niveaux d'énergie mécanique de chacune des deux orbites.

Exercice 4 (1,1 points) : Bras de levier

Nous étudions dans ce problème la physique d'un système (voir schéma ci-dessous) composé d'un bras de levier, d'une poulie, et d'un poids. La position du bras de levier est repérée par l'angle θ par rapport à l'horizontale. Le bras de levier est constitué d'une tige de longueur L et de masse m, à laquelle est fixée à l'une de ses extrémités une sphère métallique de rayon r (r est négligeable par rapport à L) et aussi de masse m. Ce bras de levier est soudé à l'axe d'une poulie de telle sorte qu'une rotation angulaire $d\theta$ de la poulie entraine la même variation d'angle $d\theta$ de la position du bras de levier par rapport à l'horizontale. La poulie est libre de tourner sans frottement autour d'un axe Δ fixe porté par la direction $\overrightarrow{e_x}$ et passant par O le centre de masse de la poulie. Le moment d'inertie de la poulie de rayon R selon cet axe est I_p. Un fil inextensible de masse négligeable est enroulé autour de la poulie de telle sorte qu'il ne glisse pas (il peut se dérouler ou s'enrouler). A l'une des extrémités du fil est accrochée une masse M, comme représenté sur le schéma ci-après. G est le centre de masse du bras de levier (tige + sphère) et il est situé à la distance d de l'axe de rotation de la poulie.



Remarque : dans les questions a-e, on ne tient pas compte des effets de l'air ambiant.

4a Le schéma ci-dessus représente une position d'équilibre pour le système. Déterminez l'angle θ_{eq} correspondant à cette position d'équilibre.

4b Il existe en fait une deuxième position d'équilibre. Que vaut alors l'angle correspondant ? Démontrez que la première position obtenue pour θ_{eq} correspond à un équilibre stable alors que la deuxième position correspond à un équilibre instable. *On pourra utiliser pour la démonstration la relation* $cos(\theta_{eq} + \alpha) = cos\,\theta_{eq}\cos\alpha - \sin\alpha\ \ sin\,\theta_{eq} \approx cos\,\theta_{eq} - \alpha\ \ sin\,\theta_{eq}$, *avec* α *un petit angle*.

4c Déterminez la masse maximum $M = M_{max}$ que l'on peut suspendre tout en conservant une situation d'équilibre stable.

4d Calculez le moment d'inertie I_O du bras de levier, c'est-à-dire du solide « tige+sphère », pour une rotation autour de l'axe Δ. On rappelle que les moments d'inertie pour une rotation autour d'un axe passant par le centre de masse sont $\frac{2}{5}mr^2$ pour la sphère et $\frac{1}{12}mL^2$ pour la tige. *Notez que pour ce calcul on considèrera le rayon r de la sphère négligeable devant L.*

4e Le système est à nouveau à sa position d'équilibre stable avec la masse $M < M_{max}$ (comme sur le schéma ci-dessus). On appuie légèrement sur le bras de levier et on le lâche à un angle $\theta_0 > \theta_{eq}$. Déterminez l'équation du mouvement du bras de levier selon θ. Simplifiez cette équation dans le cadre de l'approximation des petits angles. On posera $\alpha = \theta - \theta_{eq}$ *avec* $cos(\theta_{eq} + \alpha) \approx cos\,\theta_{eq} - \alpha\ \ sin\,\theta_{eq}$. Que pouvez-vous dire de ce mouvement ?

L'air de l'atmosphère génère un frottement fluide qui reste faible mais non négligeable.

4f Faites un graphique de l'évolution de la position du bras de levier $\theta(t)$ en fonction du temps (en partant de $t=0$) sous l'effet du frottement fluide induit par l'air. On prendra comme conditions initiales $\theta(0) \approx \theta_{eq}$ et $\dot{\theta}(0) > 0$.