Physique Générale « Mécanique »

Examen du 21 janvier 2022, 10:15 – 13:15

Veuillez rédiger vos réponses dans le cahier ci-joint.
Le cahier ne doit pas être dégrafé. Seul le cahier est ramassé et corrigé.

Dans tous les exercices, sauf indication contraire, les résultats sont à exprimer en fonction des données fournies et des constantes physiques connues.

Chaque réponse doit être justifiée dans le cadre prévu à cet effet (une page blanche supplémentaire est disponible à la fin de chaque exercice si nécessaire).

Le sujet de l'examen comprend 4 exercices.

Seul document autorisé : une page de notes A4 recto/verso. Pas de calculatrice ; pas de téléphone.

Formulaire :

Coordonnées polaires :

$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

Coordonnées cylindriques :

$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$

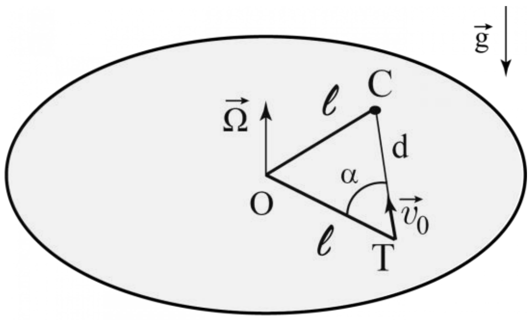
Coordonnées sphériques

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$

$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$

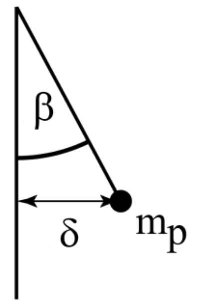
Exercice 1 (1,3 points) : Tir à l'arc dans un manège

Un nouveau jeu consiste à tirer à l'arc sur une cible dans un manège en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante. L'archer (le tireur à l'arc) (T) et la cible (C) se situent à la distance ℓ du centre du manège (O). La cible est placée à la distance d du tireur. Le manège tourne dans un plan horizontal et le champ de gravitation $\vec{g}$ est uniforme. L'archer vise le centre de la cible et tire une flèche de masse m à la vitesse $\vec{v_0}$ (ce vecteur pointe en direction du centre de la cible et est horizontal, c'est-à-dire que la hauteur de la flèche à $t=0$ est la même que celle du centre de la cible). La direction de la vitesse $\vec{v_0}$ fait un angle α par rapport au vecteur $\overrightarrow{TO}$.



1a Dans un premier temps, on pose la cible sur le manège. On la modélise par un objet ponctuel de masse M. La cible n'est pas solidaire du manège, c'est-à-dire qu'elle peut glisser en subissant un frottement sec. On met en mouvement le manège en augmentant progressivement la vitesse de rotation. La cible reste immobile dans le référentiel du manège puis se met à glisser lorsque la vitesse angulaire dépasse la valeur Ω_c. Exprimez Ω_c en fonction de g, ℓ et μ_s le coefficient de frottement statique.

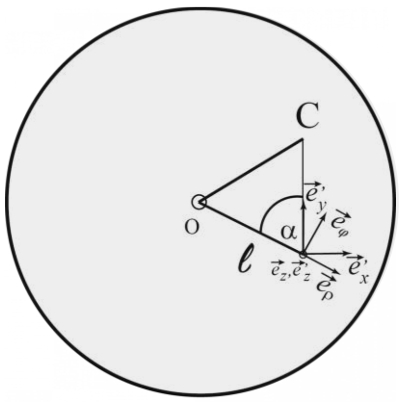
L'archer décide de mesurer la vitesse de rotation Ω à l'aide d'un pendule. Celui-ci est constitué d'un fil inextensible et d'une petite bille de masse m_p (la bille est considérée comme un objet ponctuel). L'archer repère la verticale lorsque le manège est à l'arrêt. Le manège est mis en rotation à la vitesse angulaire Ω_0; le pendule forme alors un angle β avec la verticale (Cf. schéma).



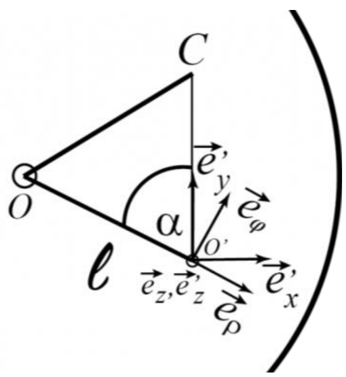
1b Déterminez Ω_0 en fonction de β et des données du problème. On considèrera que la déviation δ du pendule par rapport à la verticale est très faible par rapport à la distance ℓ du pendule à l'axe de rotation.

1c Tracez sur la figure ci-dessous (manège vu de dessus) les vecteurs $\overrightarrow{F_{in}}$ et $\overrightarrow{F_{cor}}$ représentant respectivement la force d'inertie (centrifuge) et la force de Coriolis s'appliquant à la flèche tirée à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ à $t=0$. On prendra le point T comme origine des vecteurs.

ATTENTION : utilisez la figure dans le cahier.



1d Exprimez les composantes de $\overrightarrow{F_{in}}$ et $\overrightarrow{F_{cor}}$ dans le repère R' (O', $\overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e'_z}$), repère cartésien dans le référentiel du manège avec l'origine O' à la position du tireur (Cf. schéma ci-dessous).



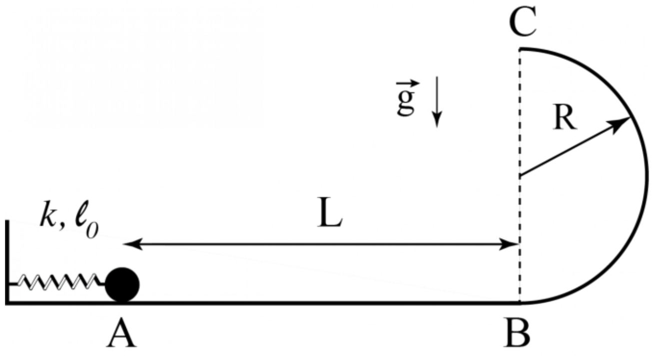
On donne les relations suivantes :

$$\overrightarrow{e_\rho} = \sin\alpha \overrightarrow{e'_x} - \cos\alpha\, \overrightarrow{e'_y}$$
$$\overrightarrow{e_\varphi} = \cos\alpha\, \overrightarrow{e'_x} + \sin\alpha\, \overrightarrow{e'_y}$$
$$\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e'_z}$$

1e Calculez la déviation Δ de l'impact de la flèche par rapport au centre de la cible. On ne prendra pas en compte la pesanteur et on considèrera que, comme la déviation est faible, $\vec{v}(t) \approx \overrightarrow{v_0}$.

Exercice 2 (1,4 points) : Etude du mouvement d'un point matériel et d'une roue

Le système mécanique (voir figure ci-dessous) pour étudier la physique du mouvement d'un objet de masse m consiste en un ressort de longueur au repos l_0 et de raideur k (la bille et le ressort ne sont pas liés). L'objet peut être lancé avec une vitesse v_A au point A en comprimant le ressort avec la bille (il n'y a aucun frottement lors de la détente du ressort). L'objet parcourt une distance L entre A et B. Sur ce trajet, le parcours est parfaitement horizontal. En B, l'objet amorce avec la vitesse v_B un mouvement circulaire qui est imposé par une surface incurvée correspondant à un demi-cercle de rayon R. L'objet quitte la surface incurvée au point C avec une vitesse v_C horizontale. Il est soumis à un champ de gravitation constant $\vec{g}$.



1ère partie : l'objet est un point matériel de masse m

2a On comprime le ressort d'une distance d. Quelle est la vitesse v_A d'émission de l'objet au point A en fonction de d et des données du problème ?

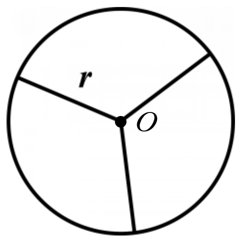
2b On étudie tout d'abord l'effet d'une force de frottement sec entre l'objet et la surface sur le parcours entre A et B. Exprimez la vitesse v_B au point B en fonction de v_A, L, et des données du problème. On appelle μ_d le coefficient de frottement dynamique.

2c On ajoute, en plus du frottement sec, une force de frottement fluide qui s'exerce sur l'objet pendant le parcours entre A et B. Déterminez la vitesse $v(t)$ et la position $x(t)$ en fonction du temps et des données du problème. On prendra $v(t=0) = v_A$ et $x(t=0) = 0$ au point A. On pose la force de frottement fluide F_{fl} telle que $F_{fl} = -\alpha v$ avec v la vitesse de l'objet et α ($\alpha > 0$) le coefficient de frottement fluide.

2d L'objet poursuit son mouvement sur la surface incurvée. Il n'y a aucun frottement (ni sec, ni fluide) entre B et C. Quelle est la vitesse v_B minimum pour que l'objet atteigne le point C (il reste au contact de la surface jusqu'en C) ?

2ème partie : l'objet est un solide indéformable.

L'objet solide est une roue constituée d'une partie circulaire de rayon r et de masse m, et de 3 rayons, chacun de longueur r et de masse m (voir schéma ci-dessous). Le centre de masse de la roue est en O (axe de rotation).



On connait les moments d'inertie pour une rotation autour d'un axe passant par le centre de masse de chacun des solides suivants :

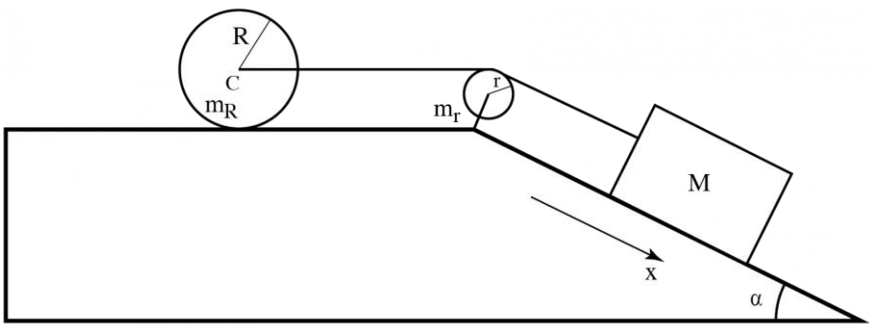
- cercle seul : $I_{cm,cercle} = mr^2$
- rayon seul : $I_{cm,rayon} = \frac{1}{12}mr^2$

2e Calculez le moment d'inertie total de la roue pour une rotation autour d'un axe passant par le centre de masse.

2f L'objet roule sans glisser entre B et C. Quelle doit être la vitesse v_B minimum pour que la roue atteigne le point C (la roue reste en contact avec la surface incurvée jusqu'en C) ?

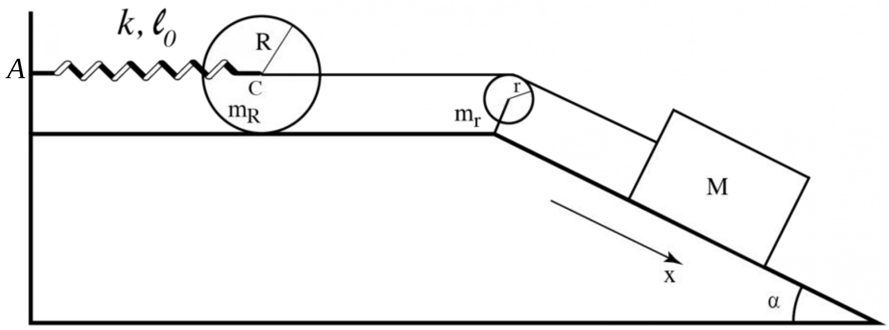
Exercice 3 (1,3 points) : Poulie et ressort

Soit un système mécanique (voir schéma ci-dessous) constitué d'une roue de masse m_R et de rayon R, d'une poulie de masse m_r et de rayon r, d'une masse M (considérée comme un objet ponctuel), et d'un fil inextensible qui relie la masse M à l'axe de rotation de la roue (C). La roue roule sans glissement et la masse M se déplace sur le plan incliné sans frottement. Le plan incliné forme un angle α avec l'horizontale. L'ensemble est soumis à la force de pesanteur. On note I_R et I_P les moments d'inertie respectivement de la roue et de la poulie, pour une rotation autour d'un axe passant par le centre de masse. On suppose que le fil est toujours tendu pendant le mouvement.



3a La masse M étant supérieure à la masse de la roue, elle se met à descendre le long du plan incliné. Exprimez l'accélération de la masse M suivant l'axe des x.

On ajoute un élément dans le système : un ressort de longueur au repos ℓ_0 et de raideur k. Le ressort est fixé d'un côté à un support (A) et de l'autre côté à l'axe de la roue (C), comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



3b Le système est à l'équilibre avec le ressort en extension. Calculez l'allongement $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ du ressort.

A partir de sa position d'équilibre, on déplace la masse M vers le bas et on la lâche sans vitesse.

3c Déterminez l'énergie mécanique <u>totale</u> du système en fonction de $\dot{x}$, x, et des données du problème. La position x est la position de la masse M définie par rapport à sa position d'équilibre.

3d Trouvez l'équation de mouvement de la masse M. Donnez l'expression de la pulsation ω_0 et de la période T_0.

3e On applique au point d'attache A du ressort sur le support un mouvement périodique tel que $x_A(t) = d\cos(\Omega t)$. Il n'y a aucun frottement entre la masse M et le plan incliné et les frottements fluides avec l'air sont négligeables. Tracez la courbe de l'amplitude A de l'oscillation de la masse M en fonction de Ω et donnez la valeur de la pulsation de résonance.

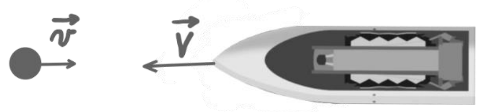
Exercice 4 (1,0 point) : Mission Télescope spatial « James Webb »

Récemment, le télescope spatial « James Webb » a été lancé dans l'espace par une fusée Ariane 5. Le tir de la fusée a eu lieu le 24 décembre dernier sur la base de Kourou (Guyane française). On notera R_T et M_T respectivement le rayon et la masse de la Terre. G est la constante de gravitation universelle.

Le télescope de masse m est tout d'abord placé sur une orbite circulaire à l'altitude h.

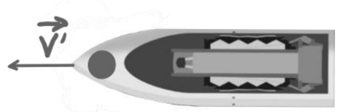
4a. Calculez la vitesse orbitale V du télescope en fonction de h et des données du problème (la démonstration est demandée).

Lors de son orbite, le télescope est heurté par un débris spatial qui, heureusement, n'endommage pas le télescope mais reste incrusté dans le bouclier de protection (voir figure ci-dessous). La vitesse du débris est $\vec{v}$ et sa masse m_d. Le choc est frontal ($\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{V}$) et la vitesse après le choc de l'ensemble [télescope + débris] est $\vec{V'}$.



m_d m

Avant le choc



$m_d + m$

Après le choc

4b Déterminez la vitesse V' après le choc.

Après le choc, le télescope passe sur une trajectoire elliptique, avec r_a et r_p respectivement les normes des rayons vecteurs à l'apogée (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre) et au périgée (point de la trajectoire le plus proche de la Terre).

4c Tracez les courbes de l'énergie potentielle effective pour la trajectoire circulaire initiale (avant le choc) de rayon r_0, et l'énergie potentielle effective après le choc. Indiquez sur la figure les rayons r_0, r_a et r_p, ainsi que E_0 et E_1, l'énergie mécanique totale avant et après le choc.

4d Exprimez la vitesse V_p au périgée en fonction de la vitesse de V_a à l'apogée ($V_a = V'$), et des rayons r_a et r_p.

4e On souhaite que le télescope quitte l'attraction terrestre pour pouvoir poursuivre sa mission. Quelle doit être l'énergie cinétique minimum additionnelle qui doit lui être communiquée lorsqu'il se trouve à l'apogée ?