Physique générale : mécanique

Examen écrit du 18 janvier 2019, 8:15 – 11:15

L'examen comporte 4 exercices, numérotés de 1 à 4.

L'énoncé contient 5 pages numérotées.

Seul document autorisé :
une fiche de notes manuscrites sur l'équivalent d'une feuille A4 recto verso.

Calculatrice interdite.

Tout doit être rédigé au stylo.

Inscrivez votre nom sur chacun des feuillets et au début de chaque exercice sur l'énoncé.

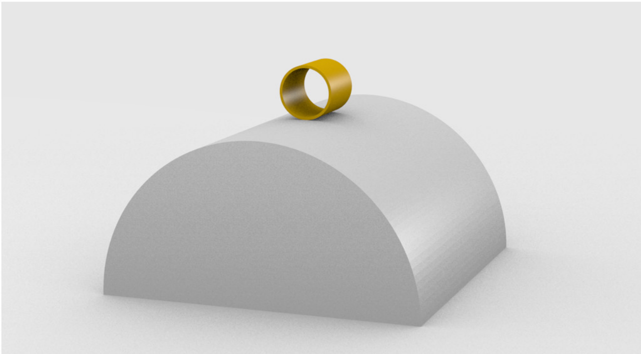
Un exercice par feuillet (page double A4 pliée) seulement.
Les réponses finales à chaque question doivent être reportées sur l'énoncé dans les cases prévues à cet effet.
Les justifications détaillées et propres doivent être rendues sur les feuillets fournis.

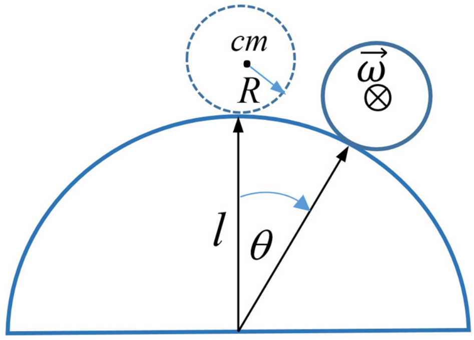
Ne pas retourner cette feuille avant le début de l'épreuve

Nom : .... *Prénom :* .... *Section :* .... *No :* ....

Exercice 1: Cylindre creux qui roule puis décolle (1,4 point)

Un cylindre creux de masse m, de longueur L, de rayon R, et d'épaisseur négligeable repose sur un support dont la forme est un demi-cylindre de rayon l, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Les deux axes de symétrie des cylindres sont parallèles. Le cylindre creux est initialement immobile au sommet du support ($\theta = 0$), puis il se met à rouler sans glisser le long du support. La position du cylindre creux est repérée par l'angle θ, tel qu'indiqué sur la figure ci-dessous. On néglige les frottements de l'air. On note g l'accélération de la pesanteur.





a) Démontrez que le moment d'inertie I_{cm} du cylindre creux pour une rotation autour de son axe de symétrie est $I_{cm} = mR^2$.

b) Indiquez les forces qui s'exercent sur le cylindre creux. On prendra soin de préciser leur point d'application. Dessinez ces forces sur le schéma de droite, pour la position $\theta > 0$.

Le cylindre creux roule sans glisser jusqu'à un angle critique θ_C, puis il « décolle ». Il n'est alors plus en contact avec le support.

c) Quel est le type de trajectoire du cylindre creux après avoir quitté le support ?

d) Calculez l'angle critique de décollage θ_C .

$\theta_C =$

e) Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre creux selon θ, pour $\theta < \theta_C$ (pendant qu' il roule sans glisser sur le support). Exprimez cette équation en fonction de R, l, et g.

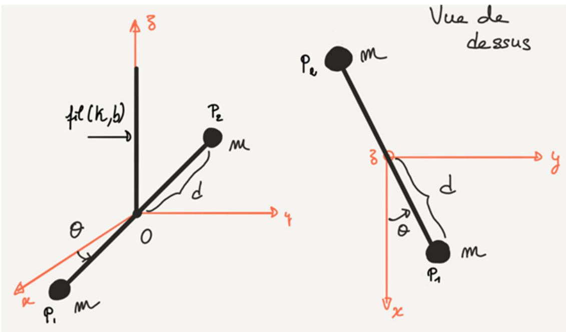
f) Si le cylindre creux glissait sans frottement (pas de rotation), l'angle critique de décollage θ_C serait-il plus grand ou plus petit ? Argumentez sans calcul.

Nom : .... Prénom : .... Section : .... No : ....

Exercice 2: La balance de Cavendish (1,4 point)

La balance de Cavendish est un instrument permettant de déterminer expérimentalement la constante de gravitation G. Elle est constituée de deux points matériels P_1 et P_2 de même masse m reliés par une tige sans masse à un fil, formant un pendule de torsion. Deux grosses sphères de masse M, S_A et S_B, peuvent être placées de manière à faire dévier le pendule dans un sens ou dans l'autre par l'effet de la gravitation.

Partie 1 : Étude du pendule de torsion.



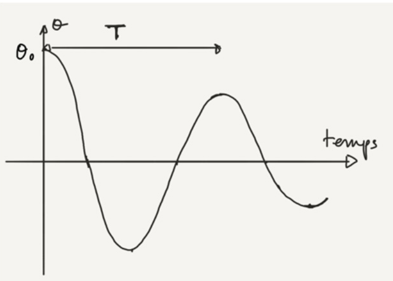
Les masses P_1 et P_2 sont reliées par une tige sans masse de longueur $2d$, et contraintes de tourner autour de O dans le plan horizontal (O, x, y) .

a) Calculez le moment d'inertie I_O du pendule de torsion par rapport à l'axe (Oz)

$I_O =$ ....

Le fil est caractérisé par deux constantes, κ et b, définies comme suit :

- le fil exerce un moment élastique dépendant de l'angle de déviation θ, donné par $\vec{\mathcal{M}}_0^{el} = -\kappa\theta\vec{e}_z$,
- et les frottement internes du fil exercent le moment $\vec{\mathcal{M}}_0^{f} = -b\dot{\theta}\vec{e}_z$.



On écarte le pendule de sa position d'équilibre de l'angle θ_0 et on le lâche sans lui communiquer de vitesse angulaire. On mesure l'angle de déviation en fonction du temps et on observe des oscillations décroissantes avec une pseudo période T (voir ci-contre).

b) Établissez l'équation différentielle du mouvement sur la variable θ .

....

c) Quelle est la pulsation propre du pendule de torsion ?

Pulsation propre : ....

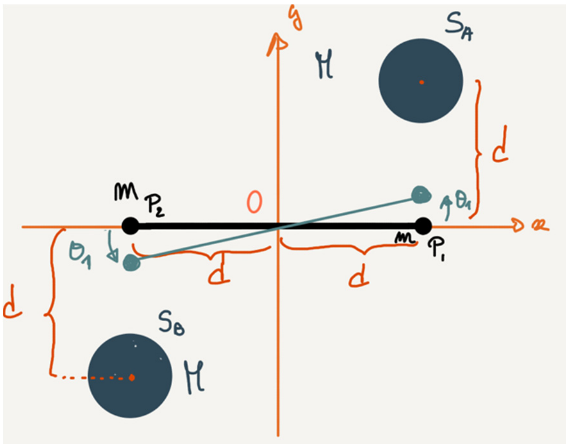
d) Donnez la forme générale de la solution de l'équation différentielle sans calculer les constantes d'intégration. Explicitez la pseudo-période et le facteur d'amortissement en fonction des données du problème.

$\theta(t) =$ ....

e) On suppose l'amortissement très faible ($b \approx 0$) et on mesure T. Déterminez κ en fonction de T, m et d.

$\kappa =$ ....

Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles



On amène les deux grosses sphères (S_A, S_B) de masse M, en regard des masses ponctuelles (P_1, P_2) à une distance d de l'axe Ox, et on laisse le pendule s'équilibrer avec l'angle de déviation θ_1. On suppose l'angle θ_1 très faible ($\theta_1 \ll 1$).

a) Exprimez (vectoriellement) le moment, par rapport à O sur le pendule, lié à la force de gravitation de S_A sur P_1 et de S_B sur P_2.

$\vec{\mathcal{M}}_{0,1}^{tot} =$ ....

b) Exprimez (vectoriellement) le moment lié à la force de gravitation de S_A sur P_2 et de S_B sur P_1.

$\vec{\mathcal{M}}_{0,2}^{tot} =$ ....

c) Montrez que pour un calcul d'ordre de grandeur, on peut négliger $\|\vec{\mathcal{M}}_{0,2}^{tot}\|$ devant $\|\vec{\mathcal{M}}_{0,1}^{tot}\|$

....

d) Exprimez l'angle θ_1 à l'équilibre en fonction de G, M, m, d et κ .

$\theta_1 =$ ....

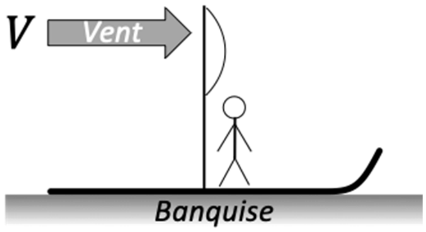
e) Déduisez l'expression de G en fonction de M, m, d, T et θ_1 , grandeurs qui sont connues ou facilement mesurables.

$G =$ ....

Nom : .... Prénom : .... Section : .... No : ....

Exercice 3 : Voyage de Mike Horn sur un traineau à voile (1,1 point)

On étudie le trajet de l'aventurier Mike Horn qui voyage sur un traineau à voile sur la banquise. Mike se déplace dans la même direction que le vent de vitesse V. Les patins du traineau subissent une force de frottement sec avec la banquise, avec des coefficients statique et dynamique μ_s et μ_d respectivement. La poussée du vent dans la voile correspond à une force de frottement fluide en régime laminaire, avec un coefficient de viscosité η et un facteur de forme K. η, K et V sont constants durant le trajet. On note m la masse totale du traineau et de Mike, et g l'accélération de la pesanteur. La banquise est parfaitement horizontale. Les frottements du vent ne s'exercent que sur la voile.



a) Le traineau est initialement au repos. Au temps $t = 0$, Mike ouvre la voile. Le traineau ne se met en mouvement que si la vitesse du vent est supérieure à une valeur V_{min} . Exprimez V_{min} en fonction des données du problème.

$V_{min} =$ ....

b) La vitesse du vent étant suffisante ($V > V_{min}$), le traineau se met en mouvement. Au bout d'un certain temps, la vitesse du traineau se stabilise à la valeur v_{0l}. Exprimez v_{0l} en fonction des données du problème.

$v_{0l} =$ ....

c) On note $v(t)$ la vitesse du traineau. Trouvez une équation différentielle sur v décrivant le mouvement du traineau, en fonction de v_{0l}, m, K et η .

....

d) Exprimez la vitesse du traineau en fonction du temps et des paramètres v_{0l}, m, K et η .

$v(t) =$ ....

e) Durant le trajet (alors que sa vitesse s'est stabilisée à v_{0l}), Mike attrape et charge à bord, sans s'arrêter, un bloc de glace de masse M posé sur la banquise. La vitesse du traineau chute brutalement à la valeur v_1 , puis elle augmente et se stabilise à nouveau à la valeur v_{1l}. Exprimez v_1 et v_{1l} en fonction de v_{0l} , m, M, g, μ_d, K et η .

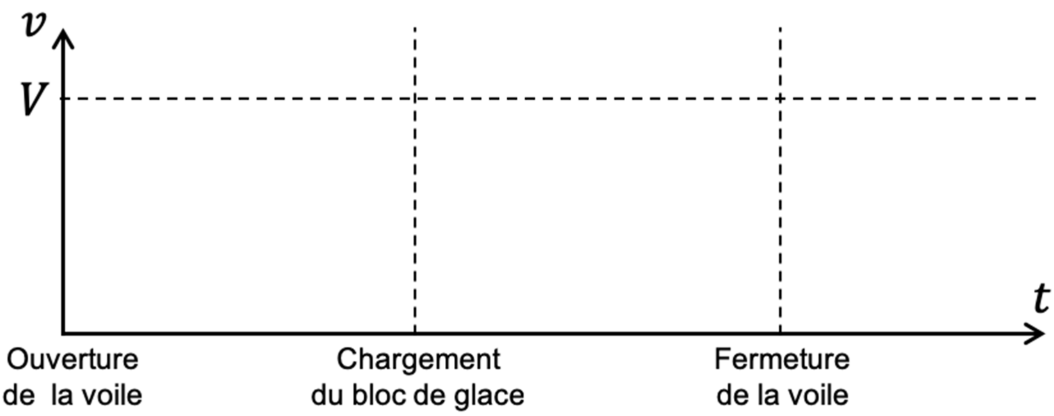
$v_1 =$ ....

$v_{1l} =$ ....

f) Enfin, Mike ferme la voile pour s'arrêter. Exprimez la distance d'arrêt L après la fermeture de la voile, en fonction de v_{1l} et des données du problème.

$L =$ ....

g) Complétez le graphe suivant pour décrire l'évolution de la vitesse du traineau durant le trajet (la vitesse du vent y est notée, rajoutez-y au besoin les vitesses discutées dans les questions précédentes).



Nom : .... Prénom : .... Section : .... No : ....

Exercice 4 : Vol vers la Station Spatiale Internationale (1,1 point)

La station spatiale internationale est un satellite tournant autour de la Terre. Les spationautes sont ravitaillés périodiquement par une navette lancée par une fusée. On appellera G la constante de gravitation universelle et M la masse de la Terre.

Après la libération par la fusée, la navette de masse m est placée sur une orbite circulaire C_1 de rayon R_1, qui est plus petite que l'orbite circulaire C_2 de rayon R_2 de la station spatiale.

a) Démontrez que la vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire est constante.

....

b) Exprimez la vitesse v_1 de la navette sur l'orbite circulaire C_1 en fonction des données du problème.

$v_1 =$ ....

c) Donnez l'expression de l'énergie mécanique E_1 sur l'orbite C_1 en fonction de G, m, M, et R_1.

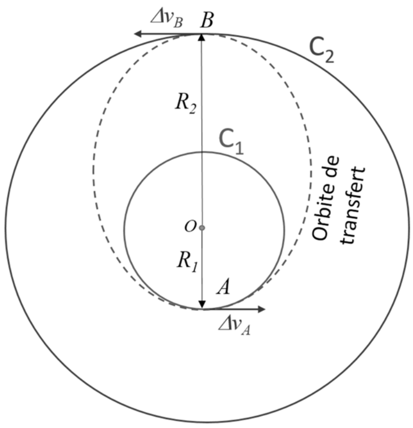
$E_1 =$ ....

La navette rejoint ensuite l'orbite C_2 grâce à l'allumage d'un moteur.

d) Calculer le travail W_{12} de la force de gravitation $\vec{F}$ qui s'exerce sur la navette quand celle-ci passe de l'orbite C_1 à l'orbite C_2.

$W_{12} =$ ....

En pratique, pour atteindre l'orbite circulaire C_2, il faut d'abord passer par une orbite de transfert qui est elliptique, comme indiqué en pointillé sur le schéma ci-dessous.



e) La navette est sur l'orbite de transfert. Exprimez la vitesse v_B de la navette au point B en fonction de sa vitesse v_A au point A.

$v_B =$ ....

f) Déterminez l'expression de l'énergie mécanique E_T sur l'orbite de transfert en fonction de G, m, M, R_1 et R_2.

$E_T =$ ....

g) Exprimez la vitesse $v_A = v_1 + \Delta v_A$ qu'il faut communiquer à la navette pour passer de l'orbite circulaire C_1 à l'orbite de transfert. Le résultat sera exprimé en fonction de E_T, E_1, et m.

$v_A =$ ....

h) La variation de vitesse Δv_B de la navette en B est-elle positive ou négative ? Justifiez votre réponse sans calcul.

....