10: Mehrkörpersysteme

I. Wie beschreibt man die lineare Bewegung eines Mehrkörpersystems ?
- Massenschwerpunkt/Massenmittelpunkt (centre de masse, CM)
- Dynamik und mechanische Energie eines Systems mit N Körpern

II. Wann befindet sich ein starrer Körper im Gleichgewicht ?
- Drehmoment

III. Was versetzt einen starren Körper in eine Drehbewegung ?
- z. Erinnerung: Dynamik der Drehbewegung des Massenpunktes

Vorbereitung auf die Vorlesung und Übungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs zu lesen** *(3.5 Seiten)*:

- 9-8 Center of Mass
- 11-4 Torque
- 12-1 The condition for equilibrium

Vorbereitende Übungen *(5)* **vor der Übungssession** zu erledigen **:**

- Giancoli 9-62, 63
- 10-25, 29, 30

Giancoli Kapitel 9-8, 9-9; 11-3, 11-4, 11-2, 12-1 bis 3

Wie bestimmt man die potentielle Energie eines Menschen ?

Beobachtung: Man definiert die potentielle Energie (U=mgh) = 0 am Boden des Hörsaals. Dies ist (fast) richtig für die Füsse, aber nicht für die Nase.

Frage: Welches ist die potentielle Energie des Menschen (Masse M) im Hörsaal ?

$\Delta U_i = \Delta m_i g h_i$ $\quad\quad U = \sum \Delta U_i = \sum \Delta m_i g h_i$

Während der Lektionen 1-9 haben wir die Dynamik und Kinematik des Objektes durch einen Massenpunkt idealisiert •

Frage: Wie trägt man der Tatsache Rechnung, dass die meisten Objekte drei Dimensionen aufweisen ?

Wie definiert man im physikalischen Sinne die Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls etc., eines solchen Objektes ?

$\boxed{U = MgH = \sum \Delta m_i g h_i}$

$$H \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i h_i}{M}$$

10-1. Was definiert die Position eines Objektes mit Dimensionen ?

Situation: Zwei Massen m_1 und m_2 befinden sich am Ort x_1 und x_2

Definition: Die Position x_{CM} des **Massenschwerpunkts (CM)** definiert man als

$$\boxed{x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}}$$

Totale Masse: $M=m_1 + m_2$

Für zwei identische Massen :

$$x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Regel 1: Der Massenschwerpunkt eines homogenen Objektes befindet sich auf seiner Symmetrieachse oder -ebene (sofern vorhanden)

Wie bestimmt man den CM von N Objekten in 3D ?

... und für ein Objekt mit komplexer Geometrie

Für N Massenpunkte befindet sich der Massenschwerpunkt (CM) entlang x

$$x_{CM} \equiv \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k x_k}{M} \qquad M \equiv \sum_{k=1}^{N} m_k$$

Es folgt die Verallgemeinerung in 3D (vektoriell) :

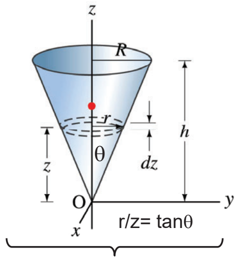
$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{M}$$

Ein starrer Körper kann als Summe von N sehr kleinen Massen Δm betrachtet werden :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \Delta m_k \vec{r}_k}{M} \underset{\lim \Delta m_k \to 0}{=} \frac{1}{M} \int_{Objekt} \vec{r}\, dm$$

$$M = \int_{Objekt} dm$$

z.B. Massenschwerpunkt von $\underbrace{\text{homogenen}}_{\text{Dichte } \rho \text{ konstant}}$ Objekten

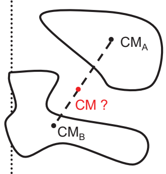


$r/z = \tan\theta$

Wie bestimmt man den CM entlang z des Konus ?

$$dm = \rho\pi r^2 dz = \rho\pi \tan^2\theta\, z^2 dz$$

$$z_{CM} = \frac{\int z\,dm}{\int dm} \rightarrow \boxed{z_{CM} = \frac{3}{4}h}$$



Um den Massenschwerpunkt eines komplexen Objektes zu bestimmen, kann man den CM individueller Objekte berechnen, und man behandelt diese jeweils wie ein Massenpunkt am respektiven Massenschwerpunkt.

10-2. Dynamik von N Objekten

2. Axiom und mechanische Energie

« interne » Kraft: Für jede Kraft die von einem Objekt des Systems auf ein anderes ausgeübt wird, existiert eine ihr entgegengestzte Kraft, die auf ersteres Objekt wirkt (actio=reactio) :

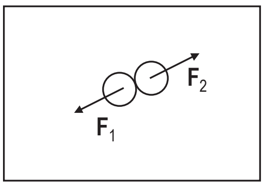
$\sum \mathbf{F}^{\mathbf{int}}=0$

Definition des CM: $M\vec{r}_{CM} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$

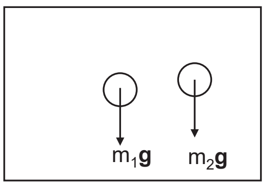
Zweite Ableitung dieser Gleichung ergibt

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_i$$

$$\sum \vec{F}_k = \sum \vec{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum \vec{F}_i^{int}}_{0} \Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_i^{ext} = M\vec{a}_{CM}}$$



Beispiel einer internen Kraft: Kollision zwischen zwei Massen des Systems



Beispiel einer externen Kraft: Erdanziehung

Wie bestimmt man den Impuls und die mechanische Energie eines Systemes ?

Impuls

Definition des CM: $M\vec{r}_{CM} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$

Die Ableitung ergibt

$$M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}$$

$$\vec{P} \equiv \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k$$

$$\boxed{\Rightarrow M\vec{v}_{CM} = \vec{P}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Mechanische Energie eines starren Körpers

$$\boxed{\vec{r}_k - \vec{r}_{CM} = konst}$$

$$\Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k (\vec{v}_k)^2 = \frac{(\vec{v}_{CM})^2}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k$$

$$\boxed{K_{CM} = \frac{M(\vec{v}_{CM})^2}{2}}$$

$$U = g\sum_{k=1}^{N} m_k h_k \quad \boxed{U_{CM} = Mgh_{CM}}$$

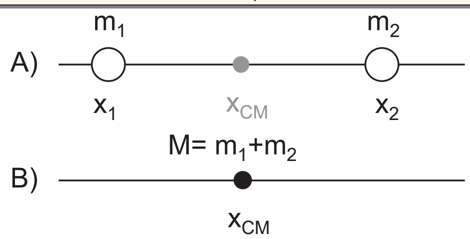
z.B.: Eine kleines Wehr von 10m besitzt eine Turbine an der Basis. Der See staut Wasser mit einem Volumen von 500·100·10 m³.
Frage: Welches ist die maximale Energie die man aus diesem See erzeugen kann ?

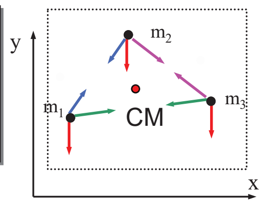
$U_{CM} = Mgh_{CM} = 500\ 10^6\ 10\ \mathbf{5\ m} = 25\ 10^9$ J = 7 MWh

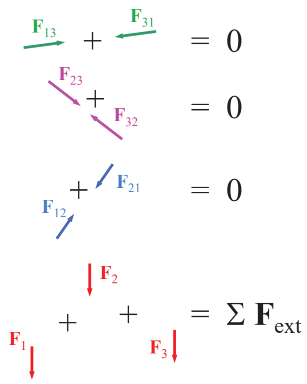
Wie behandelt man ein System von Objekten, das externen Kräften ausgesetzt ist?

Die lineare Dynamik des CM eines Systems mit M entspricht derjenigen eines Massenpunktes am Ort r_{CM} , der derselben resultierenden externen Kraft ausgesetzt ist.

» A und B sind äquivalent:







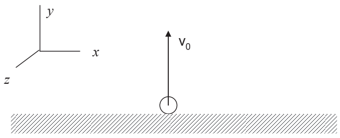
Beispiel: Feuerwerk !

Situation Eine kugelförmiges Feuerwerk von M=1 kg wird mit v_0=30 m/s in die Höhe geschossen. Nach T=2 s, trennt eine Explosion das Feuerwerk in N=100 Stücke gleicher Massen m_i und erhöht für jedes Stück die kinetische Energie um ΔK_i =0.5 J. (Jegliche Reibung vernachlässigt).

b) Welches sind die maximale (v_{max}) und minimale Geschwindigkeit (v_{min}) der Teilchen gerade nach der Explosion ?

c) Wieviel Zeit ΔT verstreicht zwischen Ankunft am Boden des ersten und letzten Teilchens?

d) Eine Sekunde nach der Explosion werden die Stücke angezündet. Welche Form kann man zu diesem Zeitpunkt beobachten und mit welchen Dimensionen ? Wo befindet sich sein Massenschwerpunkt und welches ist seine Geschwindigkeit ?



$v_{CM}(T) = v_0 - gT = 10$ m/s

Erhaltung von p:
für jedes $\mathbf{p}_i$ existiert $-\mathbf{p}_i$

$$v_i = \sqrt{\frac{2\Delta K_i}{m}} = 10 m/s$$

v_{min}=0 m/s
v_{max}=20 m/s

$\rightarrow \Delta T = 2.6$ s

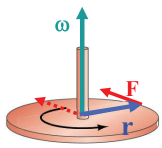
11-3. Wovon hängt die Winkelbeschleunigung α ab ?

Lineare Dynamik: Eine Kraft verändert die Geschwindigkeit v_{CM}.

Frage: Was verändert ω ?

2. Gesetz Rotation
(siehe Kurs 5 und Anhang):

$$\boxed{\underbrace{\sum\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)}_{\text{Resultierendes Drehmoment } \tau} \propto \vec{\alpha}}$$



Das **Drehmoment einer Kraft** τ entspricht der Fähigkeit dieser Kraft F, eine Drehung des Objektes um den Drehpunkt O auszuführen.

Welches sind die notwendigen Bedingungen, damit ein Körper im Gleichgewicht bleibt ?

Die zwei Bedingungen für Gleichgewicht:

$$\vec{a}_{CM} = 0 \quad \sum_k \vec{F}_k = \vec{F}_{net} = 0$$

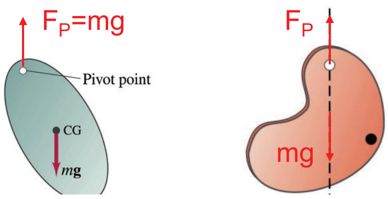
$$\vec{\alpha} = 0 \quad \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{\tau}^{\,P}{}_{net} = 0$$

(Bezüglich irgend eines Punktes P)

Wie kann man den CM eines beliebigen Objektes bestimmen ?

Experimentelle Bestimmung des CM :

Für ein Objekt mit komplexer Geometrie, hängt man dieses an zwei (oder 3) Drehpunkten auf (a=0), je nach Symmetrieachse und für jeden dieser Punkte zeichnet man eine Vertikale.

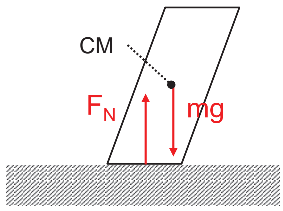


$$\sum_k \vec{\tau}_k \neq 0 \qquad \sum_k \vec{\tau}_k = 0$$

Eine Kraft, die durch den CM geht, kann keine Drehung des Objektes bewirken.

Situation: Ein Objekt mit Parallelogramm-Form befindet sich in stabiler Position auf einem Tisch.

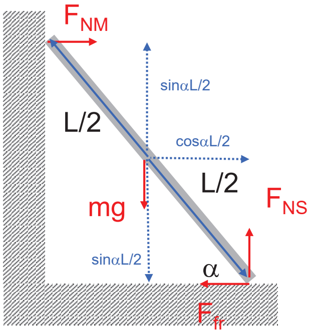
Frage: Wo wirkt F_N ?



zB. Leiter an der Mauer

Situation: Eine Leiter von 10kg und mit 3m Länge wird an eine Mauer gestellt. Die Reibung zwischen Leiter und Boden sei μ_s=0.5, μ_k=0.1.

Ab welchem minimalen Winkel beginnt die Leiter zu rutschen ?



2. Axiom (a_{CM}=0): $\vec{F}_{NM} + \vec{F}_{NS} + \vec{F}_{fr} + m\vec{g} = 0$

2. Gesetz Rotation (α=0): $\vec{\tau}_{NM} + \vec{\tau}_{NS} + \vec{\tau}_{fr} + \vec{\tau}_{mg} = 0$

Um den CM: $\tau_{mg} = 0$

$L \sin\alpha F_{fr} = L/2(\cos\alpha)mg$ $\qquad \tan\alpha = \dfrac{mg}{2F_{fr}}$

Minimal, wenn F_{fr} = max $\qquad \tan\alpha = \dfrac{1}{2\mu_S}$

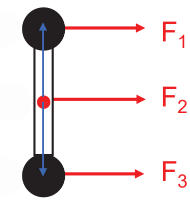
Demo: Zwei rotierende Scheiben

a_{CM} und α

Situation: Zwei Scheiben sind durch eine massenlose Stange verbunden. Man stösst an den angegeben Orten, es entstehen Kräfte mit gleichem Betrag.

Frage: Für jeden der drei Fälle, welches sind die v_{CM} und ω ?

1. Im Zentrum
2. Scheibe oben
3. Scheibe unten



I) 2. Axiom: $\sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_k = \vec{F} = M\vec{a}_{CM}$

II) 2. Gesetz Rotation: $\sum \vec{r} \times \vec{F}_i^{ext} = \vec{r}_k \times \vec{F}_k$
$= \vec{r}_k \times \vec{F} \propto \vec{\alpha}$

(Fast) die ganze Dynamik des Massenpunktes

Kraft und Drehmoment, Masse und Trägheitsmoment, kinetische Energie

NB. Die Gesetze der Drehbewegung sind eine <u>direkte</u> Folge der Newtonschen Axiome. Die Gesetze bestehen also aus Zwillingen …

	Linear (siehe Lektion 4,5,7)	Rotation (s. Lektion 5, 9)
Eindimensional (Komponente)	$\sum F = ma$	$\sum \tau_{ext}^{Achse} = I^{Achse}\alpha$
Vektoriell	$\sum \vec{F}_k = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} \equiv m\vec{v}$	$\sum \vec{\tau}^{Achse} = \frac{d\vec{L}^{Achse}}{dt}$ $\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$
Masse, Trägheitsmoment	m (Widerstand ggüber einer Änderung der Geschwindigkeit)	$I^{Achse} = mr_\perp^2$ (Widerstand ggüber einer Änderung der Winkelgeschwindigkeit)
Kinetische Energie	$K = m\frac{v^2}{2}$	$K_{rot} = I^{Achse}\frac{\omega^2}{2}$