

Série 6 / problème 3

bille dans anneau
tournant.

Exercice corrigé.

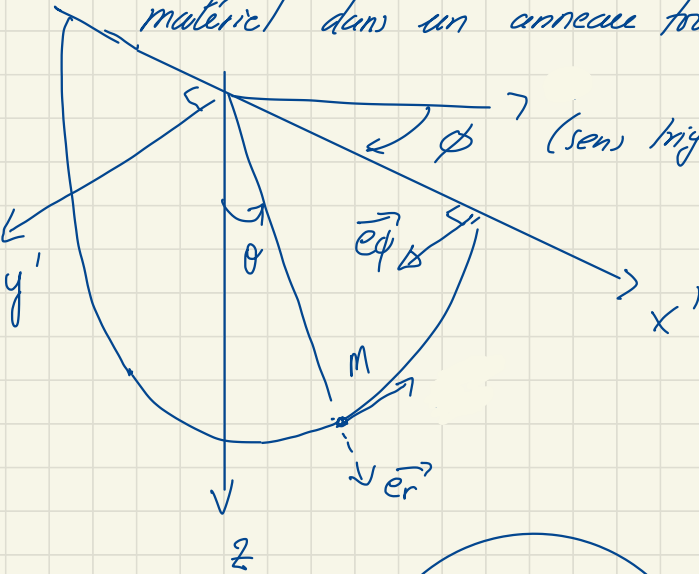
Step by Step I

26/10/20

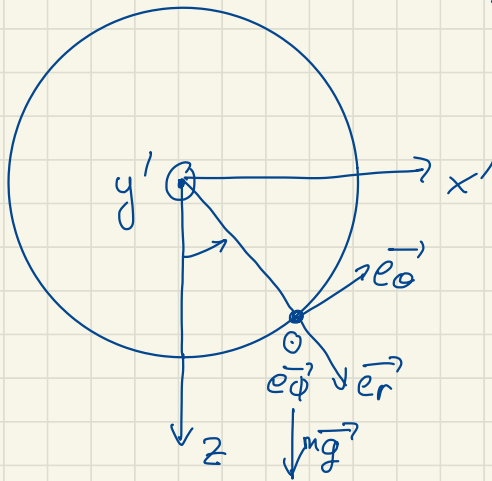
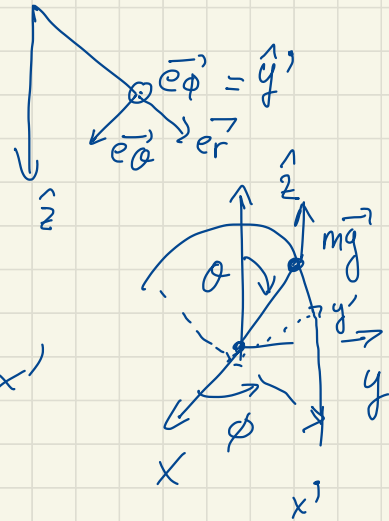
OBJECTIF

Déterminez les équations de mouvement d'un point

matériel dans un anneau tournant (au glissement sphérique hémisphérique)



$$\hat{x}' = \hat{y}' \wedge \hat{z} \\ = \vec{e}_\phi \wedge \hat{z}$$



1. Référentiel: laboratoire

2. Coordonnées: sphériques

Contraintes: r : constant et $\dot{\phi} = \omega$.

$$r = R \text{ [m].}$$

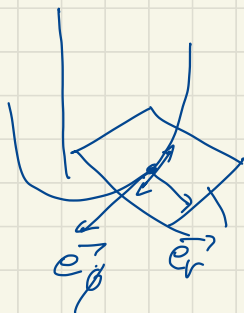
$$\dot{\phi} = \omega \text{ [rad/s]} \\ \text{avec } \omega \text{ de l'anneau}$$

3. Bilan des forces

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

gravité et force de liaison

la force de liaison est $\perp$ déplacement infinitésimal possible en bloquant le système à un instant t donné



mouvement de la bille

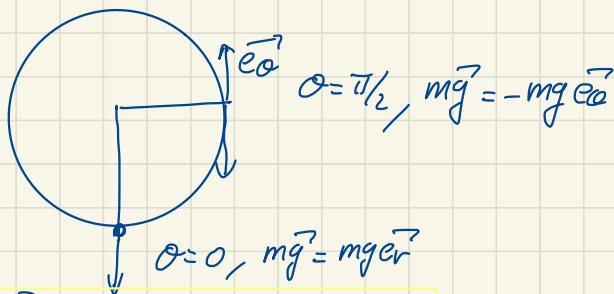
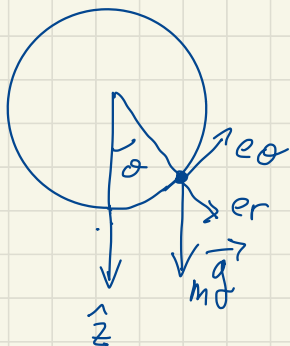
$$\delta\vec{r} = \delta r \cdot \vec{e}_r = \varepsilon \vec{e}_\theta$$

plan perpendiculaire au mouvement de la bille
plan généré par $\vec{e}_\phi$ et $\vec{e}_r$

$$\vec{T} = T_\phi \vec{e}_\phi + T_r \vec{e}_r$$

Il reste à déterminer T_ϕ et T_r .

→ Exprimer $m\vec{g}$ dans le repère sphérique



$$mg \vec{e}_r \cos\theta - mg \sin\theta \vec{e}_\theta = m\vec{g}$$

Vitesse angulaire du repère: $\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\phi$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \vec{e}_z$$

4. Equations différentielles du mouvement

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta + T_\phi \vec{e}_\phi + T_r \vec{e}_r$$

il reste à déterminer $\vec{a}$

on peut utiliser soit directement l'expression
des acc. en coord. sphériques.

soit dériver ces expressions en tenant compte des
contraintes.

C'est ce que nous allons faire ...

$$\vec{a} = \ddot{\vec{OP}}$$

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r$$

, r constant donc $\dot{r} = 0$

$$\dot{\vec{OP}} = r \dot{\vec{e}}_r = r \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r$$

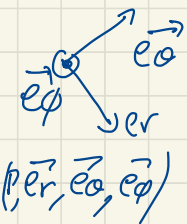
$$= r (\dot{\theta} \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\theta) \wedge \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\phi = -\vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_\phi \wedge \vec{e}_r = +\vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -\vec{e}_\phi$$

$$\boxed{+ r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi = \dot{\vec{OP}}}$$



$$\vec{\ddot{OP}} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\dot{\vec{e_\theta}} + r\ddot{\phi}\sin\theta\vec{e_\phi} + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{e_\phi} + r\dot{\phi}\sin\theta\dot{\vec{e_\phi}}$$

↓ contrainte

$$\vec{\ddot{OP}} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}(\vec{\omega} \wedge \vec{e_\theta}) + r\ddot{\phi}\sin\theta\vec{e_\phi} + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{e_\phi} + r\dot{\phi}\sin\theta(\vec{\omega} \wedge \vec{e_\phi})$$

" $\phi=0$ car $\dot{\phi}=d\theta$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{e_\theta} = (\dot{\theta}\vec{e_\phi} + \dot{\phi}\cos\theta\vec{e_r} - \dot{\phi}\sin\theta\vec{e_\theta}) \wedge \vec{e_\theta}$$

$$= -\dot{\theta}\vec{e_r} + \dot{\phi}\cos\theta\vec{e_\phi}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{e_\phi} = (\dot{\theta}\vec{e_\phi} + \dot{\phi}\cos\theta\vec{e_r} - \dot{\phi}\sin\theta\vec{e_\theta}) \wedge \vec{e_\phi}$$

$$= -\dot{\phi}\cos\theta\vec{e_\theta} - \dot{\phi}\sin\theta\vec{e_r}$$

$$\vec{\ddot{OP}} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e_r} + \dot{\phi}\cos\theta\vec{e_\phi}) + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{e_\phi} + r\dot{\phi}\sin\theta(-\dot{\phi}\cos\theta\vec{e_\theta} - \dot{\phi}\sin\theta\vec{e_r})$$

$$(r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e_\theta}$$

$$(-r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\vec{e_r}$$

$$(2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\vec{e_\phi}$$

comparaison avec le corrigé

$$mR(\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta) = -mg\sin\theta$$

$$mR(-\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2\sin^2\theta) = mg\cos\theta + N_r$$

$$2mR\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta = N_\phi$$

donne le mouvement

Equations du mouvement

$$\vec{e_\theta} : \begin{cases} m(r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta) = -mg\sin\theta \end{cases}$$

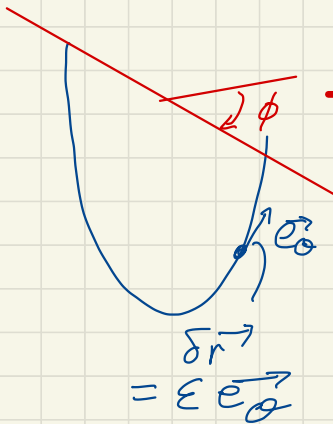
$$\vec{e_r} : \begin{cases} m(-r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = mg\cos\theta + T_r \end{cases}$$

$$\vec{e_\phi} : 2mr\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta = T_\phi$$

Remarque sur la force de liaison

les forces de liaison parfaite n'effectuent aucun travail lors d'un déplacement virtuel c'est un nouveau concept.

le déplacement virtuel est un déplacement fictif lorsque le système et les contraintes sont figées dans le temps. (on arrête le temps) et on regarde les mouvements possibles.



la glissière est fixée à un angle ϕ donné.

On regarde alors le déplacement $d\vec{r}$ et on se

rend compte que le seul déplacement possible est selon $\vec{e}_\phi$, tous les autres déplacements sont bloqués par l'anneau (glissière) on note un tel déplacement $\delta \vec{r}$ au lieu de $d\vec{r}$ (vrai déplacement $d\vec{r}$)

Principe du travail virtuel nul: (liaison parfaite)

$$\delta W = 0 = \vec{T} \cdot \delta \vec{r} = \varepsilon \vec{T} \cdot \vec{e}_\theta$$

ainsi en toute généralité

$$\vec{T} = T_r \vec{e}_r + T_\phi \vec{e}_\phi.$$
