

Lagrange I

- 1) contexte et principe
- 2) masse ponctuelle sous l'effet d'une force
- 3) le $\mathcal{L}$ et la formulation,
- 4) L'énergie d'un solide
- 5) Exemple d'application

1) Contexte et principe

→ on considère des lois de $\mathcal{L}$:

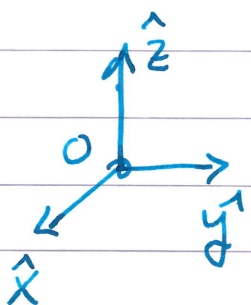
a) dans le cadre de forces issues de potentiels
 $\Rightarrow \mathcal{L}$

b) dans le cas de symétries: moment (rotation)
 q m (translation)

Le sont des quantités scalaires. Elles sont $\mathcal{L}$ lorsque les équations dynamiques de $\mathcal{L}$ sont respectées.

La question est d'inverser: Existe-t-il une fonction scalaire qui permette de déduire les équations (diff.) du mouvement? $\Rightarrow$ Formalisme de

2) Masse ponctuelle sous l'effet d'une force conservative (issue d'un $\mathcal{L}$)



$\bullet m P$

$$\vec{OP} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$\mathcal{L}$

$$m\ddot{x} = F_x =$$

$$m\ddot{y} = F_y =$$

$$m\ddot{z} = F_z =$$

C'est une équation vectorielle différentielle (3 équations différentielles)
 faisons apparaître l'énergie :

$$m\ddot{x} + \dots = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\dots \right) \right) + \dots = 0$$

la quantité de mouvement est la dérivée partielle

variation de

Comme c'est une dérivée partielle, on peut faire apparaître/introduire l'énergie

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\dots \right) \right) + \dots = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\dots \right) + \dots = 0$$

même chose pour les équations en y et en z :

$$m\ddot{y} + \dots = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\dots \right) + \dots = 0$$

$$m\ddot{z} + \dots = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\dots \right) + \dots = 0$$

3) le L

$$\boxed{\dots = \dots}$$

Coordonnées

L

— d'un nombre fini de r

— La configuration mécanique est unique

Par les coordonnées
bijection entre
et les

() mécaniques

des
EN ABSENCE

Equations de
la dynamique
(du mvt)

$$\frac{d}{dt} \left(\right) - = 0 \quad \dot{c} =$$

CAS CONSERVATIF UNIQUEMENT.

Equations de Lagrange avec forces extérieures (non conservatives)

$$\frac{d}{dt} \left(\right) - =$$

sont les forces

→ détermination des $\Rightarrow$ cf. (cours suivants)

Remarque: - importance de l'énergie
- " de "

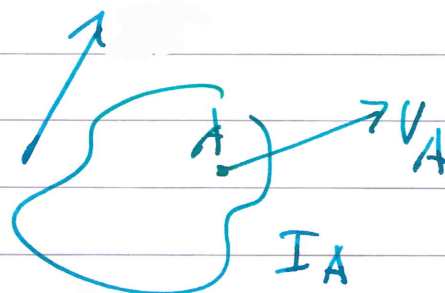
$$L =$$



!

4) Energie cinétique d'un solide

$$E_{\text{cin}} = T = \frac{1}{2} \cdot + M \left(\right) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\right)$$



(a) particuliers: point fixe ou réf. Galilée $T =$

centre de masse $T =$

Démonstration de la formule:

cinématique du solide

$$E_{\text{cin}} = T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} \cdot \vec{V}_{\alpha}$$

$$\vec{V}_{\alpha} = \vec{V}_A +$$

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\quad) \cdot (\quad) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\quad - \quad) \cdot (\quad - \quad) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A - \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\quad) \cdot (\quad) + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\quad) \cdot (\quad) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A + \sum m_{\alpha} (\vec{AG} + \quad) \cdot \vec{V}_A + \frac{1}{2} m_{\alpha} (\quad) \cdot (\quad) \\ &= \frac{1}{2} M \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A - \sum m_{\alpha} (\quad) \cdot \vec{V}_A + \frac{1}{2} \sum m_{\alpha} (\quad) \cdot (\quad) \end{aligned}$$

$\sum m_{\alpha} \vec{OG}_{\alpha} = 0$

concentrons nous sur le dernier terme

$$\frac{1}{2} \sum m_{\alpha} (\quad) \cdot (\quad) = \frac{1}{2} \sum m_{\alpha} \vec{\omega}^T [\quad]^T [\quad] \vec{\omega}$$

$$[AP_{\alpha} \Lambda] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

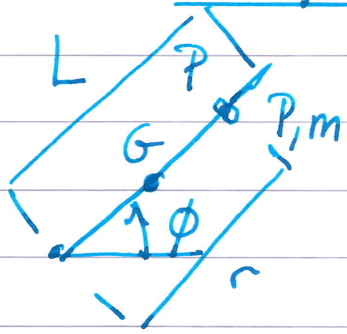
$$[AP_{\alpha} \Lambda]^T [AP_{\alpha} \Lambda] = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

ainsi

$$T = \frac{1}{2} M \quad - \quad + \quad \vec{\omega} \cdot (\quad)$$

C.Q.F.D.

5) Exemple



- barre avec un axe de rotation O fixe
- centre de masse G au milieu de la barre fixe
- longueur de la barre L
- angle ϕ
- anneau en P et de masse m. il peut glisser le long de la barre.
- position radiale de l'anneau: r

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

$$E_{\text{pot}} = V = mgr + Mg \frac{L}{2} \sin \phi = mgr + Mg \frac{L}{2} \sin \phi$$

$$\vec{OP} = r \hat{x} + \frac{L}{2} \hat{y} \quad \vec{OG} = \frac{L}{2} \hat{y}$$

$$\vec{V}_P = \left(-r \dot{\phi} \right) \hat{x} + \left(\frac{L}{2} \dot{\phi} \right) \hat{y}$$

$$\vec{V}_G = - \frac{L}{2} \dot{\phi} \hat{x} + \frac{L}{2} \dot{\phi} \hat{y}$$

$$\vec{V}_P \cdot \vec{V}_P = r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\phi}^2$$

En coord. polaires: $\vec{OP} =$

$$\dot{\vec{OP}} =$$

$$\vec{e}_P = \vec{\omega} =$$

$$\dot{\vec{OP}} =$$

$$\vec{V}_P \cdot \vec{V}_P =$$

$$\vec{V}_G \cdot \vec{V}_G =$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M + \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m}_{\frac{1}{2} I}$$

$$Y = mg + Mg$$

$$L = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m - mg - Mg$$

2 equations diff. d'ordre 2 chacune (2 coord.)

$$\textcircled{1} \frac{d}{dt} () - = 0 \quad \textcircled{2} \frac{d}{dt} () - = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} =$$

$$\frac{d}{dt} () - = \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} =$$

②

$$I_G = \int_{-L/2}^{L/2} = \int_{-L/2}^{L/2} = | =$$

$$I_O = \int_0^L = \int_0^L = | =$$