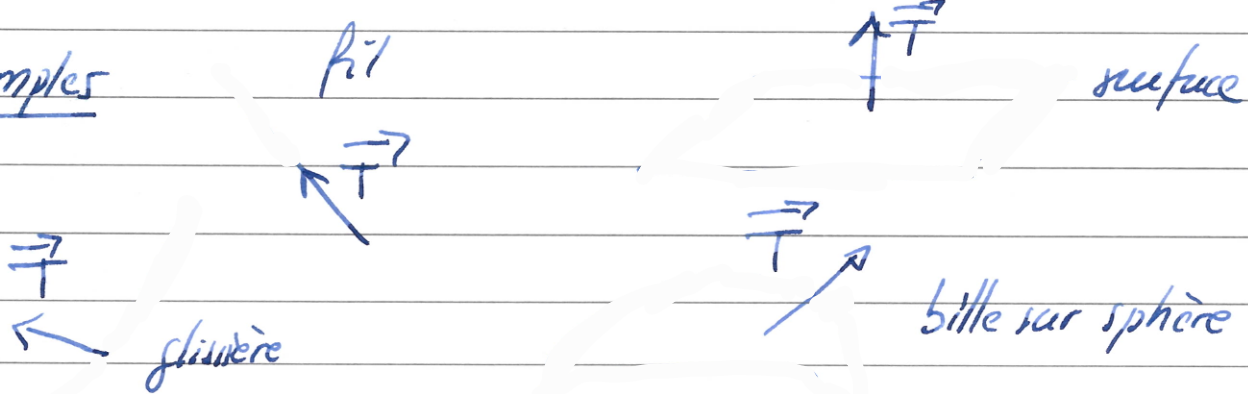


- 1) Contraintes
- 2) principe de d' (exemple du pendule simple)
- 3) d du formalisme de h
- 4) cas général (transparents)
diapositives
- 5) Exemples

9) Contraintes

Définition: entre telles que les forces nécessaires pour les faire respecter n'effectuent pas d'un déplacement avec la

Exemples



$F = 0$ expression de la c

surface + + = 0 p. ex. = 0

+ + = (bille sur sphère)

= (pendule simple)

$\phi = t$ $\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{l} x = \\ y = \end{array} \right. = \frac{R^2}{\sin 2t}$ glissière hémisphérique.

2. Principe de d'

(2)

2.1 déplacement v

la $\vec{F}(\vec{r}) = 0$ $\vec{r}$ n'est plus une

Def. Un déplacement $\vec{r}$ est un déplacement tel que $\vec{r} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 0$.

Exemple glissière $= \mathbb{R}^2$

1 d° de liberté car x, y, z sous deux contraintes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x + \delta y = 0 \\ \delta x + \delta y = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{tout } \delta x, \delta y \text{ tels que} \\ \text{les deux} \\ \text{équations soient} \\ \text{satisfaites} \end{array} \right.$$

le temps est " " " "

2.2. Travail virtuel

C'est le travail effectué par une force suite à un déplacement $\vec{r}$

$$\delta W =$$

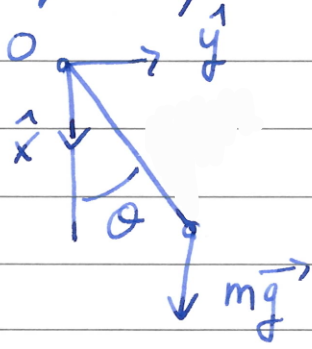
Principe de d' : Une force responsable du maintien d'une contrainte parfaite,

Exemple glissière $\vec{T} = T_x \hat{x} + T_y \hat{y} + T_z \hat{z}$

$$\vec{T} \cdot \vec{r} = 0 \quad T_x + T_y + T_z = 0$$

pour tout $\delta x, \delta y$ qui satisfont à $\left\{ \begin{array}{l} \delta x + \delta y = 0 \\ \delta x - \delta y = 0 \end{array} \right.$

Exemple du pendule simple



$$\begin{cases} m\ddot{x} = +mg \\ m\ddot{y} = \end{cases}$$

contrainte parfaite

Principe de d' déplacement virtuel $\delta x + \delta y = 0$ (1)
travail virtuel de la force de liaison:

$$\delta W = \dots + \dots = 0.$$

idée de d'Alembert

Réunir toutes les forces et les
pour exprimer
le travail des forces de liaisons
parfaites.

$$(\dots) \delta x + \delta y = 0. \quad (1)$$

Equations du pendule

il faut dériver 2x les contraintes

$$= 0$$

$$= 0$$

$$(1) \rightarrow \delta x + \delta y \text{ et } (2)$$

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = 0$$

comme il existe des $\delta x \neq 0$ $\delta y \neq 0$ il faut que

$$\begin{vmatrix} \dots \\ \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (\dots)y - x = 0 \\ \dots = 0 \end{cases}$$

Equations
cartésiennes
du pendule.

(4)

pour obtenir des équations différentielles "minimales",
c.-à-d. en nombre minimum, on doit introduire la
coordonnée généralisée θ

$$x =$$

$$y =$$

la contrainte $x^2 + y^2 = \ell^2$
est automatiquement satisfaite

déplacements virtuels:

$$\delta x =$$

$$\delta y =$$

$$\delta \theta$$

$$\delta \theta$$

accélérations

$$\dot{x} =$$

$$x'' =$$

$$\dot{y} =$$

$$y'' =$$

$$\left(\quad \right) \delta x + \left(\quad \right) \delta y = 0 \quad (\text{principe de } d')$$

$$\text{ou} \quad \left(\quad \right) \delta x + \left(\quad \right) \delta y = 0$$

$$\left(\quad \right) \left(\quad \right) \delta \theta + \left(\quad \right) \delta \theta = 0$$

$$\left(\quad \right) \delta \theta = 0$$

comme ceci doit être vrai quel que soit $\delta \theta \neq 0$

$$\ddot{\theta} =$$

3) déduction du formalisme de L à
partir du principe de d'

$$\left(\quad \right) \delta x + \left(\quad \right) \delta y = 0$$

$$\left(\quad \right) \delta x + \left(\quad \right) \delta y = 0$$

(5)

$$x = \quad \delta x = \quad \delta \theta$$

$$y = \quad \delta y = \quad \delta \theta$$

$$\dot{x} = \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} = \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}} =$$

$$\dot{y} = \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} = \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}} =$$

$$(\quad) \delta \theta + (\quad) \delta \theta \quad \text{travail des forces cinétiques}$$

$$m \ddot{x} (-l \sin \theta) = \frac{d}{dt} \left[m \dot{x} (\quad) \right] - m \dot{x} (\quad)$$

Leibniz!

$$m \ddot{x} (-l \sin \theta) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} (\quad) \right] - \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} (\quad)$$

$$\text{et } m \ddot{y} (l \cos \theta) = \frac{d}{dt} [m \dot{y} (\quad)] - m \dot{y} (\quad)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} (\quad) \right] - \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} (\quad)$$

$$\text{et ainsi } [\quad] \delta \theta = \left[\frac{d}{dt} (\quad) - \quad \right] \delta \theta$$

travail virtuel de la force potentielle

$$m g \delta x = \quad \delta \theta = \quad \delta \theta$$

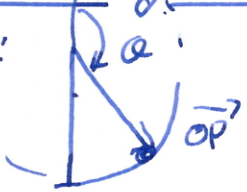
$$V = -m g l \cos \theta \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} (\quad) - \quad \right) \delta \theta = (\quad) \delta \theta$$

valable quel que soit $\delta \theta$, et donc

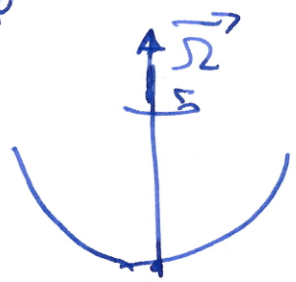
$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0} \quad \mathcal{L} =$$

Exemple : glissière hémisphérique

sphérique 1:

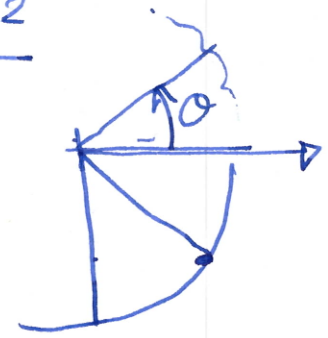


$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$



sphérique 2

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \cos \theta \sin \phi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned}$$



sphérique 1

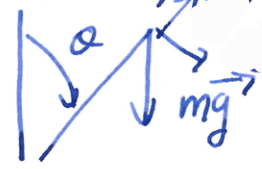
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta =$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta =$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta =$$

Equations dynamiques: (avec forces de liaison parfaite)

$$\begin{aligned} m a_r &= T_r - m g \\ m a_\theta &= T_\theta + m g \\ m a_\phi &= T_\phi \end{aligned}$$



$$\vec{m\vec{g}} =$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_r \end{aligned}$$

déplacements virtuels:

$$\delta \phi = 0 \quad \delta r = 0 \quad \delta \theta \text{ quelconque}$$

Principe de d'

$$\delta r + \delta \theta + \delta \phi = 0$$

$$\text{mais comme } \delta r = 0 \text{ et } \delta \phi = 0 \Rightarrow \delta \theta = 0 \quad \forall \delta \theta$$

$$\left(\delta \theta = 0 \quad \forall \delta \theta \neq 0 \right) \Rightarrow \delta \theta = 0$$

$$\Rightarrow = 0$$

$$= 0$$