

XII Forces centrales & Kepler

Mvt à la surface de la terre

1) Forces centrales

2) Coniques et accélération en (conique:)

2.0 Binet 2.1 conique $\Rightarrow$ 2.2 $\Rightarrow$ conique

3) Mvt à la surface de la terre : exemple sur les mvt dans des référentiels
en mvt : vitesses absolue et relative.

1) Forces centrales

Définition: Une force est dite centrale si, à chaque instant,
(Plus précis:
si sa droite de support

Thm I. Sous l'action d'une force centrale, le mouvement
d'un point matériel est toujours

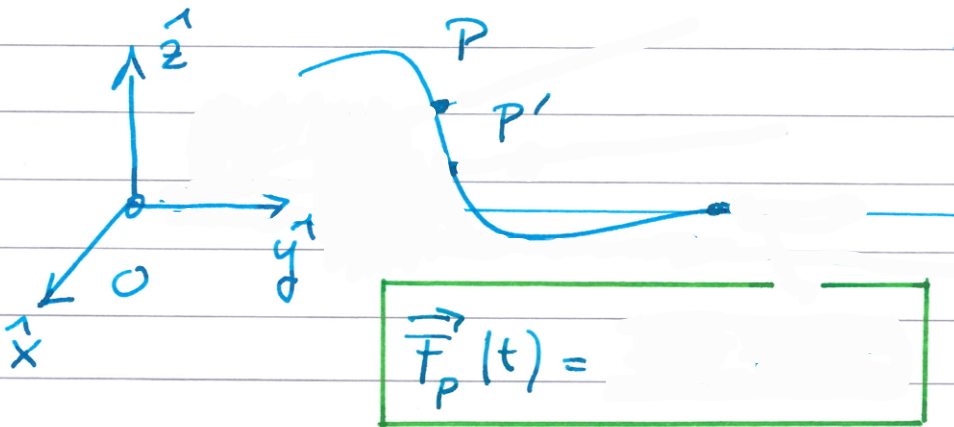


Illustration
du concept de
force centrale.

Démonstration du Thm I La et le vecteur
vitesse définissent un plan à n'importe
quel instant t dont $\hat{n}$ est la normale
mouvement est plan
 $\Leftrightarrow$

montrons que $\frac{d}{dt} \vec{h} = 0$. Soit $\vec{h} =$ fon d'un mouvement à force centrale.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{h} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{v}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v}}_{=0} + \underbrace{\vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{à cause d'une force centrale}} \\ \frac{d}{dt} \vec{h} &= \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{r} \wedge \left(-\frac{\gamma}{r^3} \vec{r} \right) = 0 \\ \Rightarrow \vec{h} &= \text{cte} \end{aligned}$$

la réciproque est évidente car si le mot est plan alors $\frac{d}{dt} \vec{h} = 0$.

ainsi $\vec{h} = \text{cte}$ (Corollaire)

Corollaire 1 Loi des $\frac{1}{r} = \text{cte}$

Démonstration

en introduisant les coordonnées cylindriques (dans le plan en question)

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= r \vec{e}_r \\ \vec{V_P} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{OP} \wedge \vec{V_P} = r \dot{\theta} \vec{e}_z = \vec{h} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \text{cte} \quad \text{car} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

2) Coniques et accélération en

2.0) La formule de Binet Dans un mouvement central, la formule de Binet exprime $1/r$ (en coord.) en fonction de θ (c-à-d. en fonction de la

Thm

Formule de Binet :

$$a_r = C \left[\frac{d^2}{d\theta^2} () + \right]$$

Explications:

C est la constante des aires

C =

r est la (fonction) distance donnée en fonction de θ .

a_r :

Démonstration:

$$V_p \vec{r} = \vec{e}_r + \vec{e}_\theta$$

$$a_p \vec{r} = \vec{e}_r + \dot{\vec{e}}_r + \vec{e}_\theta + \dot{\vec{e}}_\theta + \ddot{\vec{e}}_\theta$$

$$= () \vec{e}_r + () \vec{e}_\theta$$

a_r accélération

$$\left(\frac{d}{d\theta} \vec{r} = -\vec{r} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \quad \text{(loi de Kepler)}$$

$$= - \frac{d}{d\theta}$$

(règle de la dérivée)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d}{d\theta} \left(- \frac{d}{d\theta} \right) \right] \quad \text{loi de Kepler}$$

$$a_p = \frac{d^2 r}{dt^2} = \left[\frac{d}{d\theta} \left(- \frac{d}{d\theta} \right) \right] =$$

(comme C est une constante)

$$a_r = C \left[\frac{d^2}{d\theta^2} () + \right] \quad \text{C.Q.F.D}$$

2.1) conique $\Rightarrow a_r$ et 2.2) conique $\Leftarrow a_r$

quelques explications : on va relier l'apparition du type d'accélération en avec la nature

des trajectoires à savoir une conique qui est

Soit une
une
une

Quels sont les types d'effets physiques qui donnent une accélération en ?

Force gravifique $\chi =$ $\Rightarrow \vec{a} = -\chi$

(Force électrostatique $\chi =$)

les coniques

$$p := e \cdot d$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \alpha$$

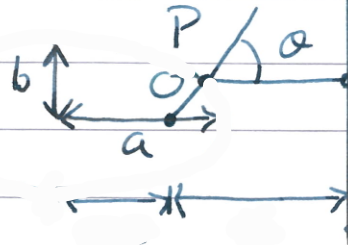
foyer O

$$\|\vec{OP}\| = r$$

grand axe a
petite axe b

distance du foyer à la directrice : d

Directrice Δ
ellipse



eccentricité : e

$$e = 0$$

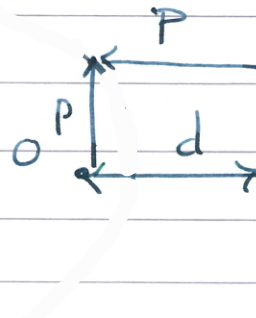
$$0 < e < 1$$

$$e = 1$$

$$1 < e < \infty$$

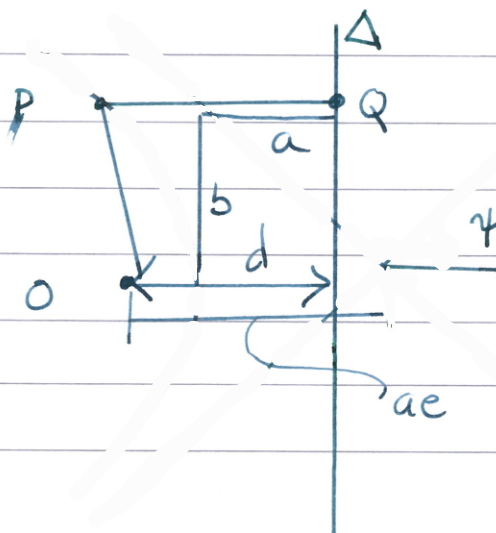
$$e = \infty$$

parabole
 $e = 1$



hyperbole

$$1 < e < \infty$$



$$\tan \gamma = \frac{b}{a}$$

$$e = \frac{PO}{PQ} = \frac{r}{d - r \cos \alpha}$$

$$p := e \cdot d$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Définition d'une conique

le rapport entre la distance au foyer et à la directrice est

$$e = \frac{r}{d} = \frac{p}{e \cdot d}$$

d est la distance de O à la directrice Δ .

2.1 Thm (conique $\Leftrightarrow$) Si la trajectoire est une conique d'équation $\frac{p}{r} = \frac{1}{e} - e \cos \theta$ elle fa alors l'accélération est en $\frac{b^2}{a^3}$.

Démonstration

La trajectoire fournit pour θ changeant un rayon r qui varie. On a ainsi l'expression du rayon vecteur (distance radiale) que l'on peut introduire dans Binet.

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 - e \cos \theta)$$

$$a_r = -\frac{c^2}{p^2} (1 - e \cos \theta)^2 \left[-\frac{1}{p} + \frac{1}{p} (e \sin \theta) \right]$$
$$= -\frac{c^2}{p^2} [1 - 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta] = -\frac{c^2}{p^2} (1 - 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta)$$

C.Q.F.D.

$$\chi = \frac{c^2}{p} = \frac{c^2 a}{b} > 0$$

dans le cas de l'ellipse.

2.2 Étudions la réciproque $\Rightarrow$ conique

Thm: Si l'évolution du point (matériel) est telle que
 $\vec{a} = -\chi$ où χ est une constante, alors le mouvement est central de centre O ,
et la trajectoire est une conique dont O est le foyer.

$$a_r = -\chi \quad (\text{hypothèse})$$

$$a_r = -c^2 \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad (\text{Binet})$$

$$-\chi = -c^2 \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

=

mais χ est une constante que l'on peut ajuster sans le symbole $\frac{d^2}{d\theta^2}$

$$= \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$\Rightarrow$ c'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} = -x$$

$$x(\theta) =$$

on peut choisir l'axe polaire afin que $B=0$

(*) =

et on a bien une équation d'une conique avec

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta$$

$$p = \frac{c^2}{|\chi|} \quad e = \frac{|A| c^2}{|\chi|}$$

$$\frac{1}{r} \frac{c^2}{\chi} = 1 + \frac{c^2}{\chi} A \cos \theta \quad \text{C.Q.F.D.}$$