

IV Energie - travail - puissance

1. le travail

1.1 déplacements et forces constants

1.2 constants par morceaux

1.3 variants continûment

2 puissance instantanée

3. potentiel — 3.1 ressort
3.2 gravité

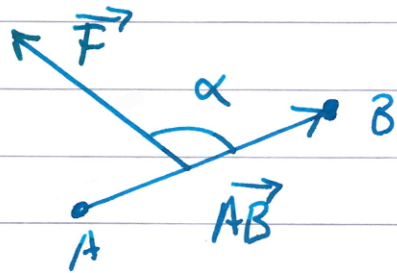
4. énergie cinétique

5. Thm de conservation de l'énergie ds un syst. isolé

6. Forces de liaisons parfaites 7. stabilité

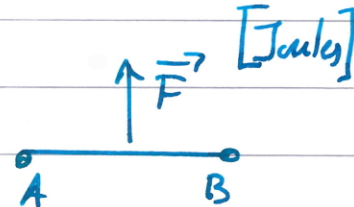
IV.1 le travail

1.1 d'une force constante sur un segment rectiligne

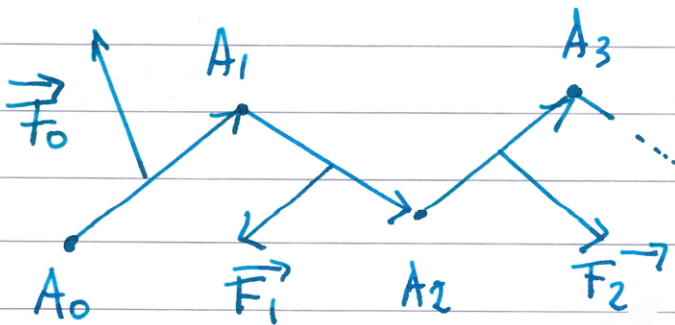


$$W \triangleq \vec{F} \cdot \vec{AB} = \|\vec{F}\| \|\vec{AB}\| \cos \alpha$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ pas de travail!
(exemple liaison du sol)



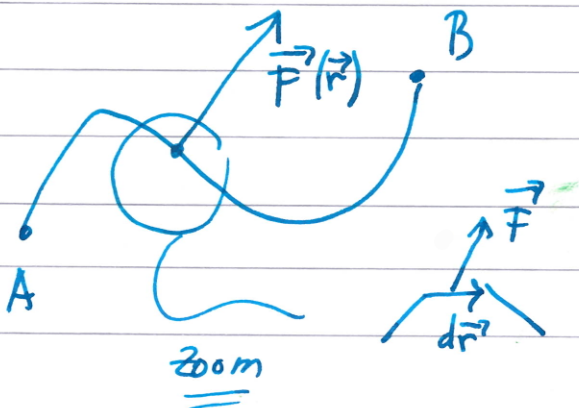
1.2 plusieurs segments, forces constantes par morceaux



$$W = \vec{F}_0 \cdot \vec{A_0 A_1} + \vec{F}_1 \cdot \vec{A_1 A_2} + \dots$$

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}_i \cdot \vec{A_i A_{i+1}}$$

1.3 segments infinitésimaux (courbe régulière), forces variables



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad [\text{Joules}]$$

somme $\rightarrow$ intégrale

constant par morceaux dans
infinitement petit

2. puissance instantanée

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

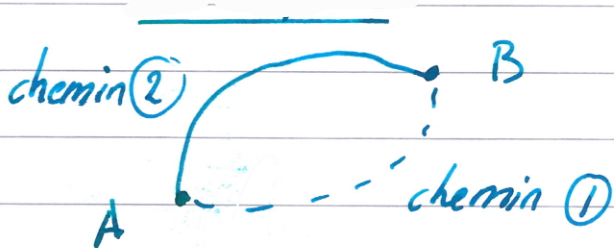
Le travail est la somme de la puissance instantanée multipliée par la durée qu'elle dure.

$$W = \int_A^B \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot dt$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad [\text{Watt}].$$

3. Potentiel: lorsque le travail ne dépend pas du chemin emprunté pour déplacer un système d'un point A vers un point B, il est possible d'introduire une fonction scalaire génératrice



$$(1) \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = (2) \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{AB}$$

pour tout chemin entre A et B.

autrement dit, la force $\vec{F}$ est issue d'un potentiel lorsque $\forall$ cycle C

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Définition du potentiel V

O .

P

$$V \triangleq - \int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

signe négatif convention

Exemples

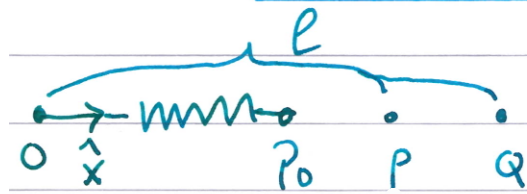
- la force de gravité est issue du potentiel $V = mgh$

- la force dans le ressort est issue du potentiel

$$V = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$$

⚠ C'est toujours une fonction scalaire.

3.1 Force du ressort et potentiel associé



$$\vec{OP}_0 = l_0 \hat{x}$$

$$\vec{P_0Q} = (l - l_0) \hat{x}$$

$$\vec{F} = -k(\vec{OP} - l_0 \hat{x})$$

$$\vec{P_0Q} = \hat{x} = \hat{OP}$$

ϵ varie de 0 à 1

Paramétrisation du déplacement

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \epsilon \vec{P_0Q}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -k(\vec{OP}_0 + \epsilon \vec{P_0Q} - l_0 \hat{x}) \\ &= -k(l_0 \hat{x} + \epsilon(l - l_0) \hat{x} - l_0 \hat{x}) \end{aligned}$$

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \hat{x} \cdot \epsilon$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\epsilon} = \frac{d\vec{OP}}{d\epsilon} = \vec{P_0Q} = (l - l_0) \hat{x}$$

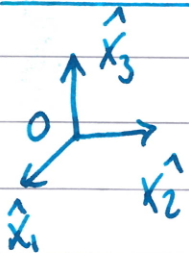
$$d\vec{r} = (l - l_0) \hat{x} d\epsilon$$

$$V = - \int_{\epsilon=0}^{\epsilon=1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\epsilon=0}^{\epsilon=1} k \epsilon (l - l_0)^2 d\epsilon$$

$$= \left[\frac{1}{2} \epsilon^2 \right]_0^1 k (l - l_0)^2$$

$$V = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$$

Thm mathématique



$$\text{Si } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \exists V(x_1, x_2, x_3)$$

$\forall C$

tel que

$$\vec{F} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} \end{pmatrix} (O, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$$

Δ Dérivée partielle: dérivée selon la variable indiquée en conservant les autres variables constantes

illustration avec le ressort

$$l = \|\vec{OP}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \|\vec{r}\|$$

$$V = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 = \frac{1}{2} k (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - l_0)^2$$

$$\vec{F} = F_1 \hat{x}_1 + F_2 \hat{x}_2 + F_3 \hat{x}_3 \quad F_1 = - \frac{\partial V}{\partial x_1} = -k (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - l_0) \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$= -k \left(x_1 - \frac{l_0 x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = -k \left(x_1 - l_0 \frac{x_1}{\|\vec{r}\|} \right)$$

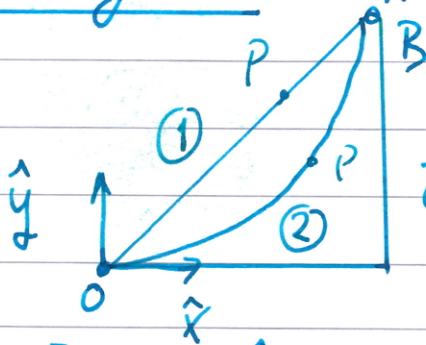
$$F_2 = - \frac{\partial V}{\partial x_2} = -k \left(x_2 - l_0 \frac{x_2}{\|\vec{r}\|} \right)$$

$$F_3 = - \frac{\partial V}{\partial x_3} = -k \left(x_3 - l_0 \frac{x_3}{\|\vec{r}\|} \right)$$

$$\text{ainsi} \quad \vec{F} = -k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + l_0 \begin{pmatrix} x_1 / \|\vec{r}\| \\ x_2 / \|\vec{r}\| \\ x_3 / \|\vec{r}\| \end{pmatrix} = -k (\vec{r} - l_0 \hat{r})$$

3.2 gravité

illustration de la non dépendance du chemin



$$\vec{F} = -mg \hat{y}$$

$$\text{chemin (1)} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} = \varepsilon \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OB} = h \hat{x} + h \hat{y} \quad \vec{r} = \varepsilon h \hat{x} + \varepsilon h \hat{y}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{d\varepsilon} = \frac{d\vec{r}}{d\varepsilon} = h \hat{x} + h \hat{y}$$

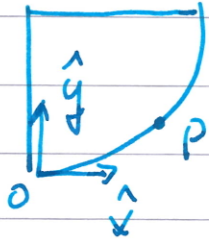
$$d\vec{r} = (h \hat{x} + h \hat{y}) d\varepsilon$$

$$V = - \int_{\text{①}}^{\varepsilon=1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} - (mg \hat{y}) \cdot (h \hat{x} + h \hat{y}) d\varepsilon$$

$$= \int_{\varepsilon=0}^1 mgh d\varepsilon = mgh$$

gravité suite

intégrale selon l'autre chemin, chemin (2)



$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ à } \alpha = 0 \quad \vec{OP} = h \cos \alpha \hat{x} + h \sin \alpha \hat{y} + h \hat{y}$$

pour $\alpha = 0$ $h \hat{x} + h \hat{y}$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \quad 0 \hat{x} + 0 \hat{y} = \vec{O}.$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\alpha} = \frac{d\vec{OP}}{d\alpha} = -h \sin \alpha \hat{x} + h \cos \alpha \hat{y}$$

$$d\vec{r} = (-h \sin \alpha \hat{x} + h \cos \alpha \hat{y}) d\alpha$$

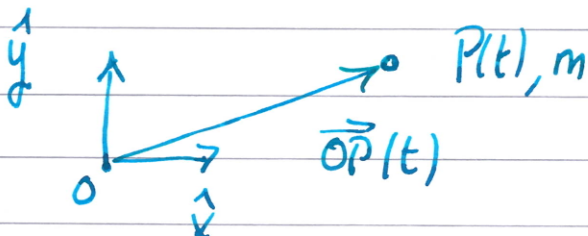
$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg \hat{y}$$

$$V = - \int_{\alpha = -\pi/2}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{-\pi/2}^0 -mg h \cos \alpha d\alpha$$

$$= \int_{-\pi/2}^0 mg \sin \alpha \cdot h = 0 - (-mgh) = +mgh$$

4 Energie cinétique

2D Energie cinétique d'un point matériel



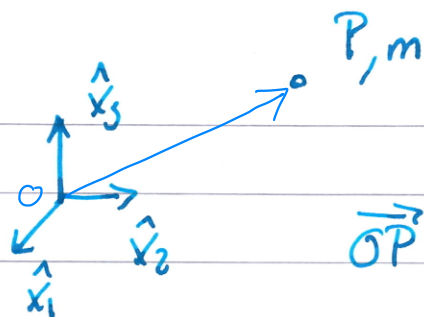
$$W_c \triangleq T \triangleq \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$\vec{OP} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

$$W_c = \frac{1}{2} m \vec{V}_P \cdot \vec{V}_P$$

$$\vec{V}_P = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} = \dot{\vec{OP}}$$

3D



$$W_c = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2$$

$$\vec{OP} = x_1 \hat{x}_1 + x_2 \hat{x}_2 + x_3 \hat{x}_3$$

$$W_c = \frac{1}{2} m \vec{V}_P \cdot \vec{V}_P \quad \vec{OP} = \dot{x}_1 \hat{x}_1 + \dot{x}_2 \hat{x}_2 + \dot{x}_3 \hat{x}_3$$

5th Thm: Dans un système avec un point matériel sous l'effet d'une force issue d'un potentiel, l'énergie est conservée. L'énergie est la somme de l'énergie cinétique et du potentiel (le dernier est aussi appelé énergie potentielle) $W = W_c + V = \text{cte}$

lois de Newton:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = F_1 \\ m \ddot{x}_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2} = F_2 \\ m \ddot{x}_3 = -\frac{\partial V}{\partial x_3} = F_3 \end{cases}$$

Energie (complet) $W = W_c + V$

$$W = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 + V$$

$$\frac{dW}{dt} = m \dot{x}_1 \ddot{x}_1 + m \dot{x}_2 \ddot{x}_2 + m \dot{x}_3 \ddot{x}_3 + \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}$$

? $\stackrel{?}{=} 0$

$$= -\frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 - \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \frac{\partial V}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} \dot{x}_3$$

$$= 0.$$

$$\Rightarrow \underline{W = \text{cte}} \quad \text{car} \quad \frac{dW}{dt} = 0.$$

C.Q.F.D

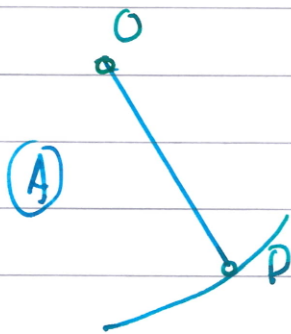
Remarque: $\Delta V = \left. \frac{\Delta V}{\Delta x_1} \right| \Delta x_1 + \left. \frac{\Delta V}{\Delta x_2} \right| \Delta x_2 + \left. \frac{\Delta V}{\Delta x_3} \right| \Delta x_3$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}$$

$x_2 \text{ et } x_3 \text{ constant} \quad x_1, x_3 \text{ constant} \quad x_1, x_2 \text{ constant}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} \dot{x}_3$$

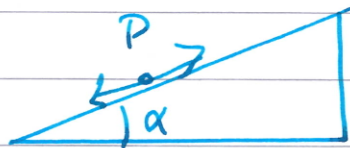
6. Forces de liaison parfaite



(A) pendule sur fil

(A)(B)

(B) plan incliné



réaction du plan

pour les $\vec{F}$ de liaison parfaite.

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{T} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{T} \cdot \vec{v} = 0$$

(A) pendule: $\vec{OP} = r \cos \alpha \hat{x} + r \sin \alpha \hat{y} = \vec{r}$

$\vec{T}$ inconnu mais on sait que $\vec{T} \cdot d\vec{r} = 0$

$$\frac{d\vec{r}}{d\alpha} = (-r \sin \alpha \hat{x} + r \cos \alpha \hat{y})$$

$$d\vec{r} = (-r \sin \alpha \hat{x} + r \cos \alpha \hat{y}) d\alpha$$

et donc on veut

$$\vec{T} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \vec{T} = T \cos \alpha \hat{x} + T \sin \alpha \hat{y}$$

avec T inconnue.

(pas besoin de dessiner quoi que ce soit!)

③ plan incliné $\vec{OP} = \cos \alpha \delta \hat{x} + \sin \alpha \delta \hat{y}$

avec α fixe et δ variable

$$\frac{d\vec{OP}}{d\delta} = \cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y}$$

$$d\vec{r} = (\cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y}) d\delta$$

$\vec{T}$ inconnu mais tel que $\vec{T} \cdot d\vec{r} = 0$

on peut prendre $\vec{T} = -\sin \alpha T \hat{x} + \cos \alpha T \hat{y}$

avec $T = \|\vec{T}\|$ qui reste à déterminer en utilisant les lois de Newton.

Remarque: On n'a pas besoin de faire un dessin pour paramétrer la réaction, la force de liaison.
mais il est tjrs utile d'en faire un 😊

7 Stabilité

Point d'équilibre: toute configuration avec conditions initiales correspondant à des vitesses nulles et pour laquelle l'accélération est nulle. Le système demeure au point d'équilibre.

Stabilité dans le cas des systèmes conservatifs. (forces issues de potentiel conservatif.)

Thm: L'équilibre est (localement) stable si l'énergie potentielle est un minimum.

(Lagrange)

$\Rightarrow$ extension fin XIX par Lyapunov. (cf. Lyapunov M. H.)