

II. Newton - balistique

1.

1. Lois de Newton

- 1.1. persévérance du mvt
- 1.2. force et var. qt. mvt.
- 1.3. Action = réaction.

- 2. Moments
 - 2.1 cinétique
 - 2.2 de force.
 - 2.3 Fonc. int. ext.

3. Centre de masse

4. balistique

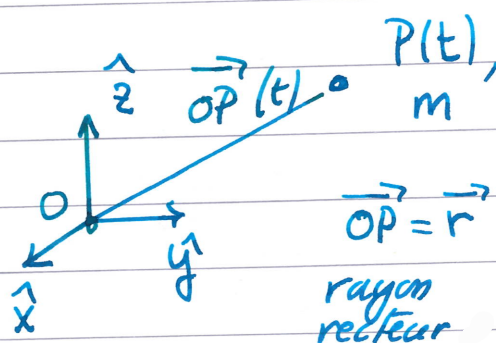
4.1 sans frottement

4.2. avec frottement

- (5. Pblme des 2 corps
 - 5.1 masse réduite

II.1 Lois de Newton

Le point P est matériel.
Il a donc une masse m .



Dynamique: La dynamique introduit des contraintes sur la deuxième dérivée de la cinématique en rapport avec les masses en jeu.

1.1 Loi 1 : Persévérance du mouvement en absence de

En d'autres termes, il ne faut "rien faire" pour maintenir un mouvement rectiligne à vitesse constante dans un référentiel Galiléen.

(Réf. Galiléen $\equiv$ réf. au repos ou en translation uniforme)

Remarque: Ce concept ne faisait pas l'unanimité avant Newton!

1.2. Loi 2: La force est introduite pour caractériser la modification du mouvement, et l'équation qui gouverne la modification du mouvement est

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (\vec{p})$$

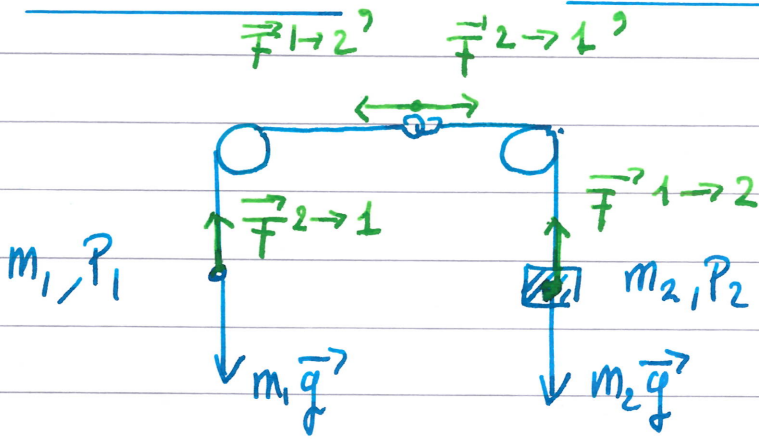
et pour un point matériel unique

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

1.3 Loi 3

Loi de l'action-réaction

2.



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \neq -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

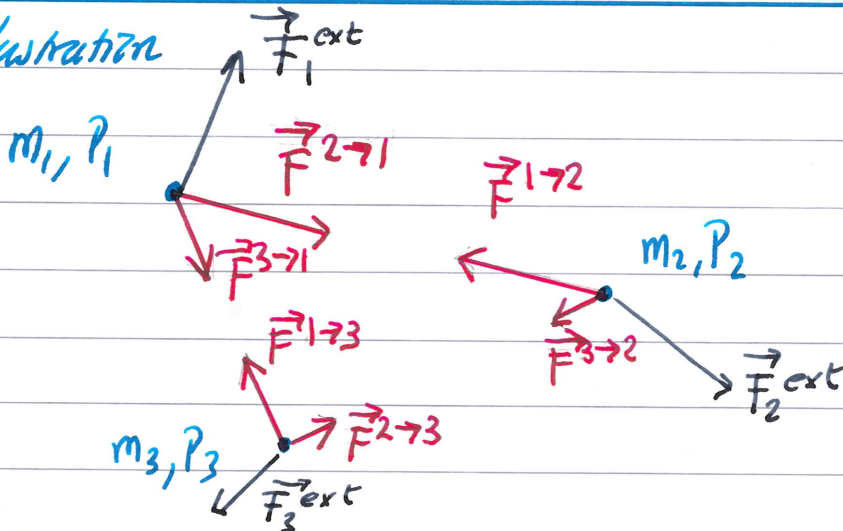


Dans une interaction mutuelle, l'action est toujours égale à la réaction (au sens des forces) dans le sens opposé.

A toute action, il y a tjrs une réaction égale qui lui est opposée.

Remarque sur les lois 2 et 3 les forces qui s'exercent sur un point s'additionnent vectoriellement. Ainsi, plusieurs causes peuvent contribuer à la modification du mouvement du point matériel, et les causes/conséquences se somment vectoriellement.

Illustration



$$m \vec{V}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1}$$

$$m \vec{V}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{3 \rightarrow 2}$$

$$m \vec{V}_3 = \vec{F}_3^{ext} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3} + \vec{F}_{1 \rightarrow 3}$$

$$\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i} \quad (i \neq j)$$

2. Moments

2.1 moment de force

$$\vec{\Pi}_O$$

lié au point O

2.2 moment cinétique

$$\vec{L}_O$$

lié au point O.

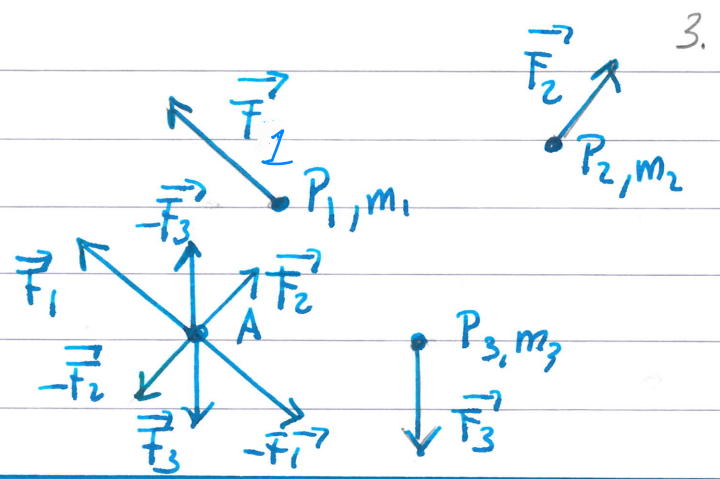
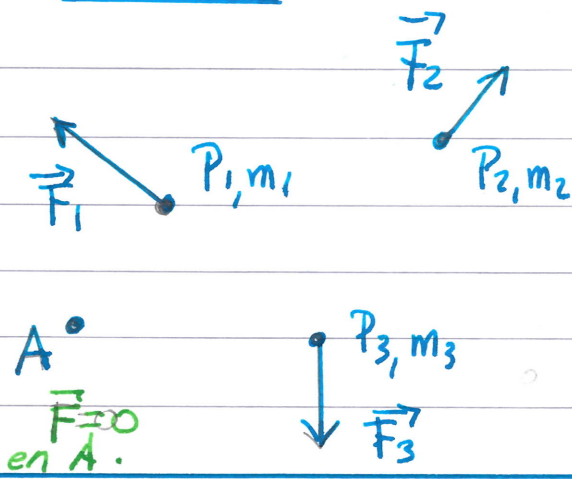
$$2.1 \quad \vec{\Pi}_O = \sum_{\alpha} \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}$$

$$2.2 \quad \vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{OP}_{\alpha} \wedge (m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha})$$

(Thm)

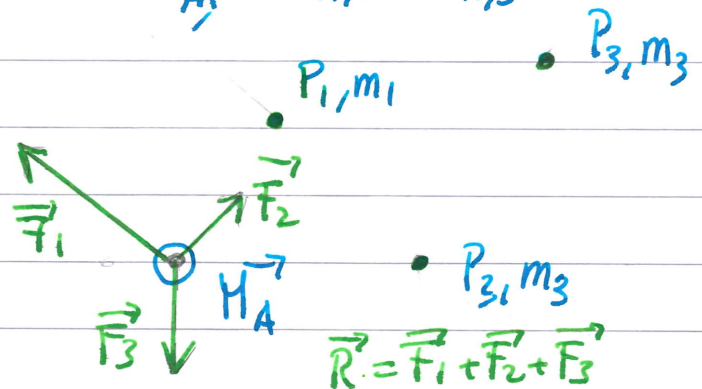
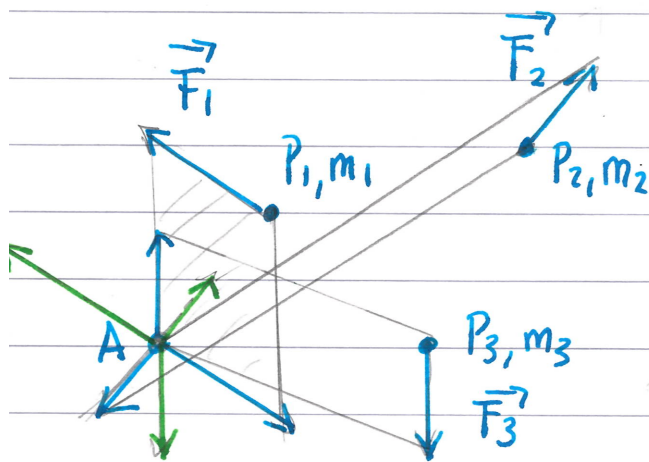
$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{\Pi}_O$$

Réduction des forces en un moment de force et une résultante



$$\vec{M}_A = \vec{AP}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{AP}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{AP}_3 \wedge \vec{F}_3$$

$$= \vec{M}_{A,1} + \vec{M}_{A,2} + \vec{M}_{A,3}$$



couple: deux vecteurs parallèles et opposés, les couples se somment vectoriellement (droite de support)

$$\vec{M}_A = \sum_{\alpha=1}^3 \vec{AP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha$$

→ La résultante sera toujours égale à la somme de forces

$$\vec{R} = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

quel que soit le point de réduction.

→ les moments de forces dépendent du point de réduction.

on a la règle BABAR

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

Démonstration de $\frac{d}{dt} L_0 = \vec{\Pi}_0$

4.

conséquence directe des lois de Newton

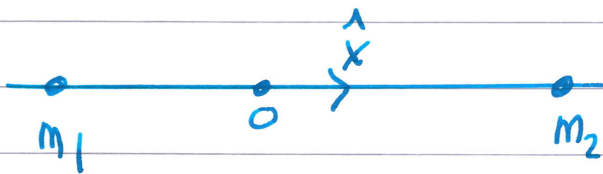
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_0 &= \frac{d}{dt} \sum \vec{OP}_\alpha \wedge (m_\alpha \vec{V}_\alpha) = \sum \dot{\vec{OP}}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{V}_\alpha + \sum \vec{OP}_\alpha \wedge m_\alpha \dot{\vec{V}}_\alpha \\ &= \underbrace{\sum \vec{V}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{V}_\alpha}_0 + \sum \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha = \vec{M}_0 \end{aligned}$$

3. centre de masse

Exemple numérique

$$m_1 = 1 \text{ [kg]}$$

$$m_2 = 3 \text{ [kg]}$$



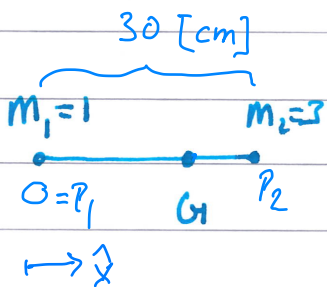
on s'attend à trouver le centre de masse
plus proche de m_2 que de m_1 .

"point où toute la masse se concentre et tel que les forces
extérieures entraînent avec elle"

idée: prendre la moyenne des distances pondérées par les
masses

$$\vec{OG} \triangleq \frac{1}{\sum_\alpha m_\alpha} \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha$$

$$\left(M = \sum m_\alpha \right. \\ \left. \text{masse totale} \right)$$

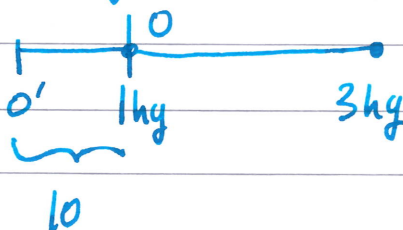


$$\vec{OP}_1 = 0 \cdot \hat{x} \quad \vec{OP}_2 = 30 \cdot \hat{x}$$

$$\vec{OG} = \frac{30 \cdot 3}{4} \hat{x} = \frac{90}{4} \hat{x} = 22.5 \hat{x}$$

Le centre de masse ne dépend pas de l'origine O ou O'

changement l'origine



$$\begin{aligned} \frac{m_1 \vec{O'P}_1 + m_2 \vec{O'P}_2}{m_1 + m_2} &= \frac{1 \cdot 10 + 3 \cdot 40}{4} \hat{x} \\ &= 32.5 \hat{x} \\ &= (10 + 22.5) \hat{x} \end{aligned}$$

$$\vec{OG} = \left(\sum_{\alpha} \vec{OP}_{\alpha} \cdot m_{\alpha} \right) \frac{1}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}$$

$$\vec{OG} = \left(\sum_{\alpha} \vec{O'P}_{\alpha} \cdot m_{\alpha} \right) \frac{1}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}$$

$$\vec{O'P}_{\alpha} = \vec{O'O} + \vec{OP}_{\alpha}, \text{ ainsi,}$$

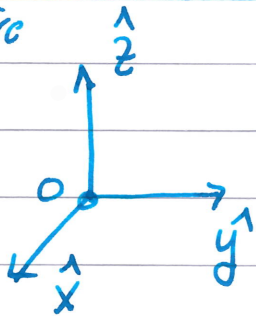
$$\vec{O'G} = \underbrace{\left(\sum_{\alpha} \vec{O'O} m_{\alpha} \right) \frac{1}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}}_{\vec{OO}} + \underbrace{\left(\sum_{\alpha} \vec{OP}_{\alpha} m_{\alpha} \right) \frac{1}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}}_{\vec{OG}} = \vec{OO} + \vec{OG}$$

4. balistique

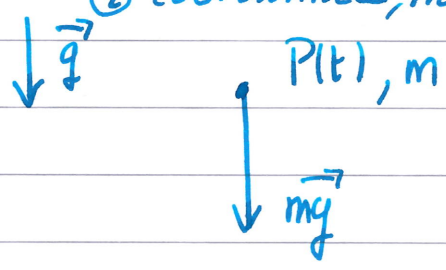
4.1 sans frottement

- Forces extérieures
- forces issues de la gravité
 - dans l'échelle laboratoire: champs de forces prop. à m .
 - et constant en direction.

① repère



② coordonnées, liaisons



③ forces en présence

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

(champ $\vec{g}$ constant)

$$\vec{g} = g \cdot \hat{z} = -9.81 \hat{z} \quad [m/s^2]$$

④ Loi de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = -mg\hat{z}$$

④ $\vec{F} = m\vec{a}$ donne trois lois équations différentielles du second ordre

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

(point ④)
Ecrire les équations du mouvement.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

⑥ $\Rightarrow$ intégrer les équations du mouvement

5.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \int(\ddot{x}) &= \int 0 \\ \dot{x} + \tilde{C}_1 &= \tilde{C}_2 \\ \Rightarrow \dot{x} &= C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1 \\ \int(\dot{x}) &= \int C_1 \\ x + D &= C_1 \cdot t + E \\ \Rightarrow x(t) &= C_1 \cdot t + C_2 \end{aligned}$$

$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_1$
 D, E, C_2
sont toutes
des constantes
d'intégration
il y en aura
autant que l'ordre
de l'eq. diff.

L'équation pour y est analogue à celle pour x
(avec de nouvelles constantes d'intégration)

$$y(t) = C_3 \cdot t + C_4$$

Par contre, pour z , c'est différent

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -g \\ \dot{z} &= -gt + C_5 \end{aligned}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_5 \cdot t + C_6$$

interprétation des constantes d'intégration

les constantes d'intégration permettent de ^{tenir compte} (spécifier) des conditions init.
ou plus précisément, à chaque condition initiale correspond
une solution unique. Les constantes d'intégration permettent de
différencier (distinguer) les solutions (les équations horaires)

$x(0)$ et $\dot{x}(0)$ $\Rightarrow$ déterminent C_1 et C_2

$y(0)$ et $\dot{y}(0)$ $\Rightarrow$ déterminent C_3 et C_4

$z(0)$ et $\dot{z}(0)$ $\Rightarrow$ déterminent C_5 et C_6

$$\begin{aligned} x(t) &= \dot{x}(0) \cdot t + x(0) \\ y(t) &= \dot{y}(0) \cdot t + y(0) \end{aligned}$$

justification

7.

$$x(0) = x_0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0$$

$$\dot{x}(t) = C_1 \quad \dot{x}(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = \dot{x}_0 = \dot{x}(0).$$

idem pour y.

$$z(0) = z_0 = C_6 \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = -g \cdot 0 + C_5 = C_5$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}(0) \cdot t + z(0)$$

4.2 Balistique avec frottement

① repère $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

② coord. x, y, z .

③ modèle de force:

$$+m\vec{g} = -mg\hat{z}$$

$$\text{et } \vec{F}_f = -b \|\vec{V}\| \cdot \hat{V} = -b \cdot \vec{V}$$

④ Lois de Newton:

$$m\vec{a} = +m\vec{g} - b \cdot \vec{V}$$

$$b \in \mathbb{R}^+ (b > 0)$$

⑤ Equations dynamique

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 - \frac{b}{m} \dot{x} \\ \ddot{y} = -\frac{b}{m} \dot{y} \\ \ddot{z} = -g - \frac{b}{m} \dot{z} \end{cases}$$

⑥ Solution des équations différentielles

8.

$$x'' = -\frac{b}{m} x$$

introduire la variable intermédiaire

$$y \triangleq x$$

$$\dot{y} = -\frac{b}{m} y$$

solution

$$y(t) = y(0) \cdot e^{-b/m \cdot t}$$

ensuite résoudre, une intégration supplémentaire, pour obtenir x :

$$x(t) = \int \dot{x}(t) dt = -\frac{b}{m} x(0) e^{-b/m t} + C_2$$

$\Rightarrow$

$$x(t) = C_1 e^{-b/m t} + C_2$$

idem pour $y(t)$.

complément:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{b}{m} y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{b}{m} dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{b}{m} dt =$$

$$\ln(y) = -\frac{b}{m} t + C$$

$$y(t) = y(0) e^{-b/m t}$$

$$\rightarrow y = e^{-b/m t + C} = e^C \cdot e^{-b/m t} = C_1 e^{-b/m t}$$

$$y(0) = C_1$$

Solution homogène

et solution particulière

$$z = z_h + z_p$$

(solution) d'une équ. diff. qui ne comporte que les variables.

solution quelconque de l'équ. diff. Pas nécessaire d'introduire les constantes d'intégration. N'importe quelle solution convient!

$$z_h'' = -\frac{b}{m} z_h$$

$$z'' = -g - \frac{b}{m} z$$

$$z_p'' = -g - \frac{b}{m} z_p$$

$$\ddot{z} = -g - \frac{b}{m} \dot{z}$$

9. solution homogène z_h

$$z_h = C_3 e^{-b/m t} + C_4$$

• Solution particulière, sous forme polynomiale,

$$z_p(t) = \alpha \cdot t + \beta$$

$$\dot{z}_p = \alpha \quad \dot{z}_p' = 0 \quad \beta = 0$$

$$-g - \frac{b}{m} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{mg}{b}$$

$$z_p(t) = -\frac{mg}{b} \cdot t$$

solution complète:

$$z_h + z_p = z$$

$$z(t) = C_3 e^{-b/m t} + C_4 - \frac{mg}{b} \cdot t$$

Introduction des conditions initiales:

$$\begin{aligned} \parallel \quad z(0) &= z_0 + C_4 \\ \parallel \quad \dot{z}(0) &= -\frac{b}{m} C_3 - \frac{mg}{b} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} C_3 &= -\frac{m}{b} \left(\dot{z}(0) + g \frac{m}{b} \right) \\ C_4 &= z_0 + \frac{m}{b} \left(\dot{z}(0) + g \frac{m}{b} \right) \end{aligned}$$

$$z(t) = -\frac{mg}{b} \cdot t - \frac{m}{b} \left(\dot{z}(0) + g \frac{m}{b} \right) e^{-b/m t} + z_0 + \frac{m}{b} \left(\dot{z}(0) + g \frac{m}{b} \right)$$