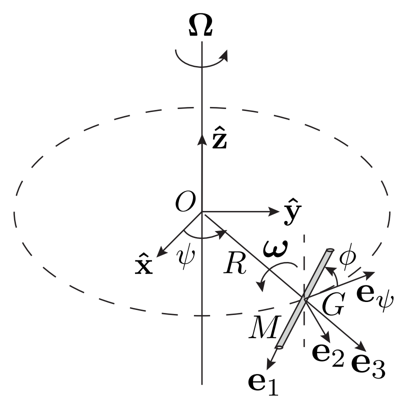
11 novembre 2024

Série 8 : Effets Gyroscopiques, Corps Solide

1. Rotation d'une hélice à deux pales

Une barre homogène de longueur L, de masse M, tourne dans un plan vertical autour de l'axe horizontal **OG** de masse nulle à vitesse angulaire $\omega = \dot{\phi}$ constante. L'axe **OG** tourne lui-même autour de l'axe vertical $\hat{\mathbf{z}}$ à une vitesse angulaire $\Omega = \dot{\psi}$ constante. Le moment d'inertie la barre par rapport à son axe vaut $I_{\parallel}$ et les moments d'inertie perpendiculaire à l'axe de la barre passant par G valent $I_{\perp}$. La distance $|\mathbf{OG}| = R$.



a) Montrer que le moment cinétique $\mathbf{L}_G$ s'exprime dans le repère d'inertie $(G, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ lié à la barre comme,

$$\mathbf{L}_G = -\, I_{\parallel}\Omega \sin\phi \, \mathbf{e}_1 - \, I_{\perp}\Omega \cos\phi \, \mathbf{e}_2 + I_{\perp}\omega \, \mathbf{e}_3 \ . \tag{1}$$

b) Montrer que $\mathbf{L}_O = MR^2\Omega \, \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{L}_G \, .$

c) Montrer que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{L}_G + \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_G \cdot \mathbf{e}_i)\, \mathbf{e}_i \ . \tag{2}$$

d) Déterminer le moment de force $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ à appliquer en O pour que la barre ait le mouvement préscrit. On ignore la pesanteur dans ce problème.

2. Virage d'avion

Un avion à hélice (l'hélice, sur le nez de l'avion, a un moment cinétique dans le sens du mouvement) vole horizontalement et s'apprête à effectuer un virage à gauche.

a) Si le pilote ne compense pas, l'avion aura-t-il tendance à monter ou à descendre ? Expliquez en termes de changement du moment cinétique.

3. Tenseur d'inertie d'un cône

Soit un cône en bois de hauter 30 [cm] et de rayon 10 [cm] de masse volumique $\mu = 600 \ \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$.

a) Calculer le centre de masse du cône.

b) Déterminer le tenseur d'inertie par rapport à un système d'axes orthogonaux et principaux passant par le centre de masse.

c) Déterminer le tenseur d'inertie par rapport à un système d'axes orthogonaux et principaux dont un des axes appartient au plan de la base du cône.

d) Déterminer la formule qui relate le tenseur d'inertie en un nouveau point du cône par rapport au tenseur au centre de gravité pour un systèmes d'axes parallèles aux axes principaux (Théorème de Steiner généralisé, ou théorème des axes parallèles).