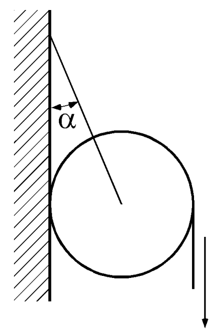
4 novembre 2024

Série 7 : Corps Solide

1. Rouleau de papier

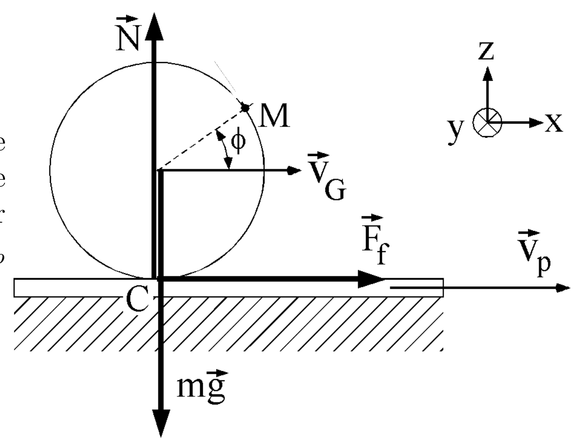
Un rouleau de papier de rayon R est suspendu par deux barres rigides de longueur L orientées selon un angle α par rapport au mur. Le rouleau a une masse m et un moment d'inertie I_G par rapport à l'axe du rouleau. Une force verticale constante $\mathbf{F}$ tire le papier vers le bas. Un frottement cinétique sec de coefficient μ_c s'exerce entre le papier et le mur (Indication : la force s'exprime à l'aide de la formule $\boldsymbol{F_f} = -\mu_c\|\boldsymbol{N}\|\hat{\boldsymbol{v}}$, avec $\boldsymbol{N}$ la force normale à la surface et $\hat{\boldsymbol{v}}$ le vecteur unitaire de la vitesse entre les deux surfaces qui glissent).



a) Déterminer la norme $\ddot{\phi}$ de l'accélération angulaire en fonction de la norme F de la force appliquée sur le papier.

2. Cylindres sur une feuille de papier

Deux cylindres de masse m, de rayon R et de moment d'inertie $I_G = \lambda m R^2$. Un cylindre est plein (i.e. $\lambda = 1/2$) et l'autre est creux (i.e. $\lambda = 1$). Ils sont posés sur une feuille de papier initialement au repos. On tire la feuille avec une vitesse $\mathbf{v}_p$ connue. Les cylindres roulent alors sans glisser sur le papier.



a) Exprimer la norme de la vitesse angulaire de rotation ω des cylindres, en fonction de la norme v_p de la vitesse du papier et de la norme v_G de la vitesse du centre de masse du cylindre.

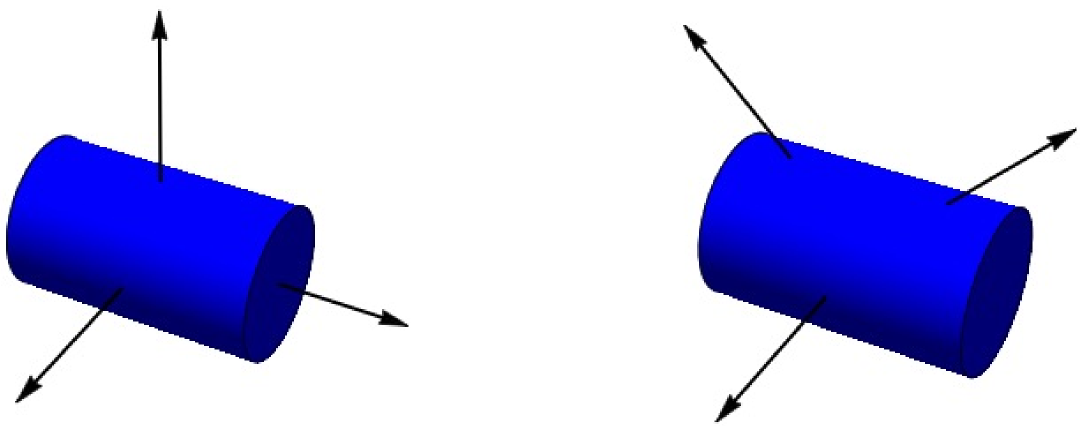
b) Déterminer la norme $\dot{\omega}$ de l'accélération angulaire des cylindres en fonction de la norme a_p de l'accélération du papier.

c) Déterminer le cylindre le plus rapide.

3. Le tenseur d'inertie d'un cylindre

Soit un cylindre de rayon R et de longueur L de matière uniforme et de masse totale m.

1. En utilisant les coordonnées cylindriques, on demande de calculer le tenseur d'inertie au centre de gravité et pour un système d'axe orthogonaux et principaux.
2. On tourne le système d'axes selon une rotation de $+\frac{\pi}{4}$ selon un axe principal différent de l'axe de la base cylindrique. On demande de déterminer le tenseur d'inertie résultant selon ce nouveau système d'axes orthogonaux (non principaux).

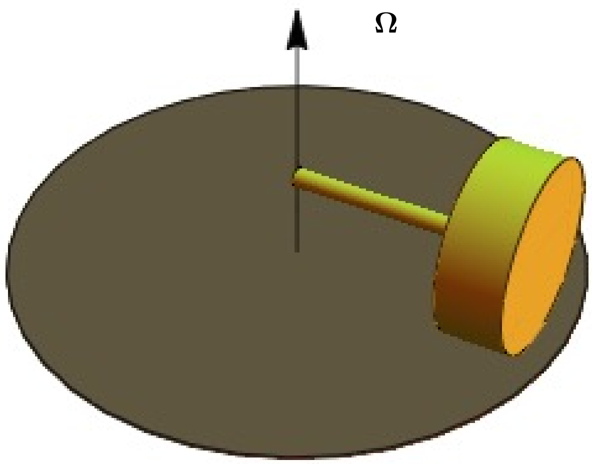


INDICATION : Pour la seconde partie du problème, prendre un $\boldsymbol{\omega}$ avec trois coordonnées algébriques quelconques (on pourra par la suite prendre des valeurs bien spécifiques dans chacune des composantes). Ecrire $\boldsymbol{L_G} = \boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\omega}$ et décomposer $\boldsymbol{L_G}$ et $\boldsymbol{\omega}$ selon le repère (base) $(G, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ choisit. Ensuite, effectuer une rotation du repère selon la description donnée de telle sorte à exprimer l'ancien repère par rapport au nouveau. Remplacer ces expressions dans celles de $\boldsymbol{L_G}$ et $\boldsymbol{\omega}$ et factoriser ensuite $\boldsymbol{L_G^{'}}$ pour faire apparaître $\boldsymbol{I_G^{'}}$, le tenseur d'inertie selon les nouveaux axes $\hat{\boldsymbol{x}}^{'}$, $\hat{\boldsymbol{y}}^{'}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}^{'}$. A cette fin, on posera $\boldsymbol{L_G} = \boldsymbol{L_G^{'}} = \boldsymbol{I}_G^{'}\boldsymbol{\omega}^{'}$ et $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{'}$ (les vecteurs sont identiques mais ce sont les composantes qui changent en fonction du repère choisit).

4. La meule

Une meule de forme purement cylindrique roule sur un plan. La meule est reliée à un axe de rotation vertical par une tige infiniment rigide et la meule se déplace avec une vitesse angulaire Ω constante autour d'un axe de rotation vertical. Un autre axe de rotation perpendiculaire à la verticale et le long de la tige supporte des roulements (les roulements sont négligés dans cette analyse) permettant au cylindre de rouler. Cet autre axe passe par le centre de la base cylindrique. La longueur de la tige (sans masse et infiniment rigide) qui relie l'axe de rotation au centre de gravité du cylindre est l et la longueur du cylindre est L. Le rayon du cylindre est R. Le roulement sans glissement à lieu uniquement au point situé à la verticale en dessous du centre de masse. On supposera que le sol effectue une réaction unique à ce point et de manière purement verticale.

— On demande de calculer la force de réaction au point d'attache situé sur l'axe de rotation vertical et qui s'exerce sur la tige infiniment rigide. (INDICATION : utiliser des coordonnées cylindriques orientées de telle sorte que la rotation de celles-ci soit autour de l'axe de rotation vertical).



5. Centre de masse, et moment d'inertie d'une tige mince non homogène

Une tige rigide de longueur un mètre repose dans le plan avec une extrémité située à l'origine du repère et l'autre en $(1, 0)$. Sa densité linéique fonction de la position x s'exprime alors comme

$$\mu(x) = 3x - 3x^2 + 1$$

a) Calculer le centre de masse de la tige.

b) Déterminer le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe vertical passant par l'origine.

6. Centre de masse et moment d'inertie d'une plaque triangulaire

Soit une plaque triangulaire intersection des demi-plans $x > 0$, $y > 0$ et $y < -x + 1$. Sa densité surfacique est donnée par

$$\mu(x, y) = (3x - 2.8x^2 + 1)(y^2 + 1)$$

a) Calculer le centre de masse de la plaque.

b) Déterminer le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe vertical passant par l'origine.

Indication : commencer par poser une intégrale double et calculer celle-ci en considérant que ce n'est que la succession de deux intégrales simples. Ces dernières sont calculées de manière similaire au problème précédant.