

25 novembre 2024

Série 10 : Lagrange I

1. Pendule à deux masses

Soit deux barres infiniment minces et rigides (sans masse) rigidement liées l'une à l'autre formant ainsi un angle droit de telle sorte à constituer deux côtés d'un triangle rectangle isocèle dont le petit côté vaut a . On place à l'intersection des barres, ainsi qu'à une des extrémités d'une barre, deux masses ponctuelles de même masse m (cf. figure). La gravité agit dans le plan vertical. Le sommet, sans masse, est placé sur un joint afin que le dispositif puisse tourner autour de ce sommet tout en restant toujours dans le plan vertical. Il y a ainsi un seul degré de liberté. Le tout est placé afin que la gravité agisse sur les deux masses de telle sorte que les deux barres se comportent comme un pendule simple. Trouver l'équation différentielle en utilisant le formalisme de Lagrange. (Indication : commencer par déterminer le centre de masse et repérer celui-ci à l'aide de la coordonnée généralisée θ qui est un angle.)

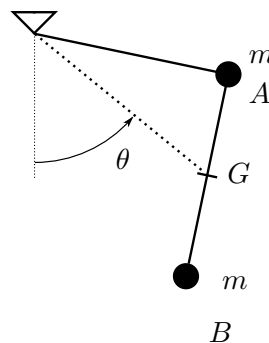
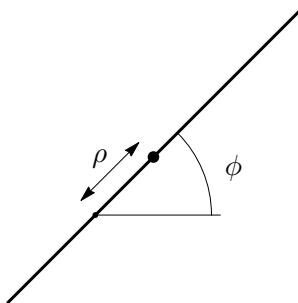


FIGURE 1 – Schéma du pendule à un degré de liberté avec deux masses identiques

2. Barre qui glisse dans un anneau



Soit une barre uniforme de masse M passant à travers un petit anneau (de masse négligeable) sur un plan horizontal. La barre peut tourner librement avec l'anneau et glisser dans celui-ci, l'anneau étant assimilé à un point fixe au repos. La distance depuis l'anneau au point milieu de la barre est ρ et l'angle de la barre avec une droite fixe du plan est ϕ . La longueur de la barre est $2l$. Utiliser le formalisme de Lagrange pour établir les équations du mouvement ainsi que d'éventuelles constantes du mouvement. (Il n'y a pas

de gravité pour tout le problème.)

3. Insecte sur une barre

Une barre fine de longueur $2a$ et de masse m est inscrite à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon c de telle sorte que les extrémités de la barre touchent le cercle et puissent glisser librement le long du cercle. Un insecte de même masse que celle de la barre se déplace avec une vitesse relative v constante par rapport à la barre. Le tout est placé horizontalement de telle sorte qu la gravité n'est pas prise en compte. On demande en utilisant le formalisme de Lagrange de trouver les équations du mouvement ainsi que les constantes du mouvement. (Indication : utiliser les coordonnées généralisées ϕ et ξ .)

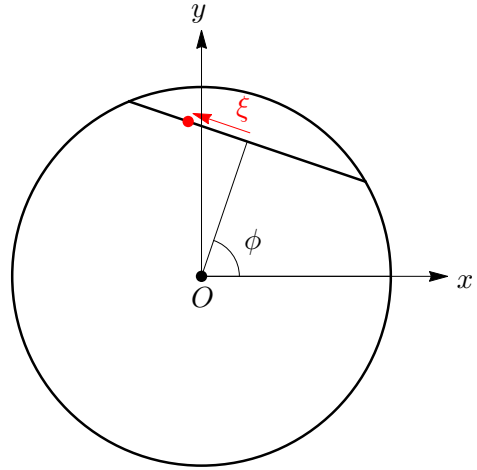


FIGURE 2 – La position de l'insecte est donnée par la distance ξ entre l'insecte et le milieu de la barre