IX. chocs et collisions

lois de Newton par saut discret, forces percussionnelles, percussions, choc élastique, choc mou, choc parfaitement mou, coefficient de restitution

Ph. Müllhaupt

Programme — IX. chocs et collisions

1. lois de Newton
2. forces precussionnelles: percussion
3. choc élastique (parfaitement élastique)
4. choc inélastique, choc mou et parfaitement mou
5. coefficient de restitution
6. problème corrigé
7. compléments

   quantité de mouvement et la loi 3 de Newton
8. théorème du moment cinétique
9. centre de masse
10. théorème du centre de masse
11. lois de Newton des chocs

lois de Newton

lois de Newton

translation:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

O est un point fixe $\quad \frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{M_O}^{\text{ext}}$

rotation: G est le centre de masse $\quad \frac{d\vec{L_G}}{dt} = \vec{M_G}^{\text{ext}}$

A est un point quelconque $\quad \frac{d\vec{L_A}}{dt} = -M\vec{v_A} \wedge \vec{v_G} + \vec{M_A}^{\text{ext}}$

remarque: les forces internes ne contribuent pas à la modification de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

Lors de chocs ces lois deviendront des lois de modification abrupte de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Les forces internes percussionnelles ne contribueront pas à la modification de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

forces precussionnelles: percussion

forces percussionnelles: percussion

En général, pour une force ordinaire, si on multiplie la force par un petit intervalle de temps et que l'on intègre, on trouve zéro:

$$\boxed{\lim_{\bar{t}\to 0}\int_0^{\bar{t}} \vec{F}^{\text{ext}}\,dt = 0}$$

Définition de la percussion (force percussionnelle): Lorsque la force est infinie et que le produit de celle-ci par un temps arbitrairement petit donne une quantité finie, on appelle la force multipliée par l'intervalle de temps très court une percussion.

$$\boxed{\lim_{\bar{t}\to 0}\int_0^{\bar{t}} \vec{F}^{\text{ext}}\,dt \neq 0}$$

récriture des lois de Newton lors de percussion

Une percussion se note $\vec{\Pi}$:

$$\vec{\Pi} \triangleq \lim_{\bar{t} \to 0} \int_0^{\bar{t}} \vec{F^{ext}}\, dt \neq 0$$

En translation, on a donc la loi de Newton qui devient

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F^{ext}} \\
d\vec{p} &= \vec{F^{ext}}\, dt \\
\int d\vec{p} &= \int \vec{F^{ext}}\, dt \\
\vec{p^{(+)}} - \vec{p^{(-)}} &= \vec{\Pi^{ext}}
\end{aligned}$$

remarque mathématique et notation

remarque: Lorsque la force est concentrée autour de zéro, il n'est pas nécessaire de faire la limite des intégrations; il suffit d'intégrer. Mathématiquement, il s'agit d'une mesure ponctuelle (mesure de Dirac) qui se généralise à la théorie des distributions de Schwartz (cours de maths avancées sur l'intégration).

La notation $(+)$ et $(-)$ dans les expressions $\vec{p}^{(+)}$ et $\vec{p}^{(-)}$ signifient que la quantité indiquée (ici la quantité de mouvement $\vec{p}$) est prise après l'instant 0 lorsque $(+)$ apparaît, et avant l'instant 0 lorsque $(-)$ apparaît. Le temps 0 est le temps du choc.

Ainsi $\vec{p}^{(+)}$ désigne la quantité de mouvement *après* le choce et $\vec{p}^{(-)}$ désigne la quantité de mouvement *avant* le choc.

moment de force et moment percussionnel

Rappel:

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{M_O}$$

Lorsque

$$\lim_{\bar{t} \to 0} \int_0^{\bar{t}} \vec{M_O}\, dt \neq 0$$

on parle de moment de force percussionnel ou moment de percussion.

moment de percussion

lorsque la force est percussionnelle

$$\lim_{\bar{t}\to 0}\int_0^{\bar{t}} \vec{OP}\wedge \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{OP}\wedge\vec{\Pi}$$

$$\boxed{\vec{L}_O^{(+)} - \vec{L}_O^{(-)} = \vec{OP}\wedge\vec{\Pi} = \lim_{\bar{t}\to 0}\int_0^{\bar{t}} \vec{M}_O\, dt}$$

conservation

Dans un système isolé et lors d'une collision ou un choc, la quantité de mouvement et le moment cinétique sont toujours conservés, que le choc soit parfaitement élastique (cf. ci-dessous avec conservation de l'énergie cinétique) ou en absence de conservation de l'énergie cinétique (choc mou, ou parfaitement mou).

Lors de percussions respecant le principe
action - réaction
le système est fermé

$$\vec{L}_O^{(-)} = \vec{L}_O^{(+)}$$
$$\vec{p}^{(-)} = \vec{p}^{(+)}$$

choc élastique (parfaitement élastique)

choc parfaitement élastique

$$W_{\text{cin}}^{(-)} = W_{\text{cin}}^{(+)}$$

$$W_{\text{cin}} = T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} \vec{v_\alpha} \bullet \vec{v_\alpha} = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \|\vec{v_\alpha}\|^2$$

pour un solide:

$$W_{\text{cin}} = T = \frac{1}{2} M \|\vec{v_G}\|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \bullet I_G \vec{\omega}$$

choc inélastique, choc mou et parfaitement mou

choc inélastique: choc mou et choc parfaitement mou

Lorsque l'énergie cinétique n'est pas conservée entre l'instant avant le choc et l'instant après le choc, on parle de choc inélastique.

Un choc inélastique avec la particularité que l'ensemble des objects du choc se retrouvent liés en un seul bloc après le choc est appelé un choc *parfaitement mou*. Il s'agit la plupart de temps du choc entre deux objets.

Un choc *inélastique* est aussi appelé un choc *mou*

Bien que l'énergie cinétique ne soit pas conservée lors d'un choc inélastique, et à condition que le système soit isolé, la quantié de mouvement et le moment cinétique sont conservés.

coefficient de restitution

coefficient de restitution $0 < e < 1$

Lors d'un choc inélastique entre deux objects, on a, d'une part

$$W_{\text{cin}}^{(+)} < W_{\text{cin}}^{(-)}$$

et on peut introduire un coefficient de restitution e

$$\boxed{0 < e < 1}$$

entre la vitesse relative avant le choc et après le choc

$$\|\vec{v_r}^{(+)}\| = e\|\vec{v_r}^{(-)}\|$$

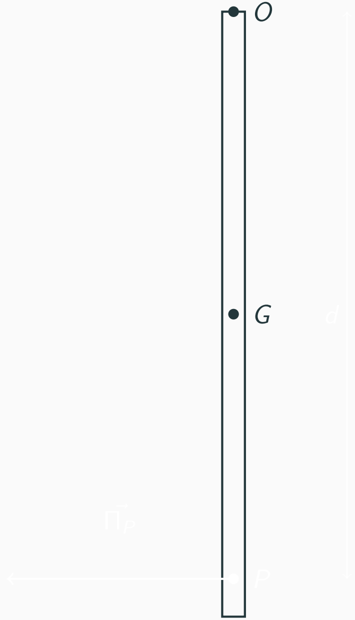
avec

$$\vec{v_r} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$$

où $\vec{v_1}$ désigne la vitesse du premier objet considéré comme un point

problème corrigé

exemple, la barre suspendue



Une barre fine d'épaisseur $a = 1[\text{cm}]$ et de hauteur $b = 1[\text{m}]$ est suspendue en O. On demande la distance d où il faut percuter la barre pour qu'il y ait aucune répercussion en O. Ceci signifie que suite à la percussion il n'y a pas de déplacement de la barre latéralement point d'attache O (aucune effort latéral en O).

Inertie de la barre en G

$$I_G = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

formulation mathématique

il faut déterminer d pour que $\vec{\Pi}_O = 0$

théorème du centre de masse, avec $v_G^{(-)} = 0$ car au repos avant la choc:

$$m\vec{v_G}^{(+)} = \vec{\Pi_P} + \vec{\Pi_O}$$

théroème du moment cinétique (pour simplifier un peu la notation $\omega^{(+)}$ sera désigné $\vec{\omega}$ et $\vec{v_G}^{(+)}$ sera $\vec{v_G}$)

$$\begin{aligned} \vec{L_O}^{(+)} &= I_O\vec{\omega} = \vec{OP} \wedge \vec{\Pi_P} \\ I_O\vec{\omega} &= \vec{OP} \wedge (m\vec{v_G} - \vec{\Pi_O}) \end{aligned}$$

première méthode, on exprime $\vec{\Pi}_P$ et on conserve $\vec{\omega}$

$$
\begin{aligned}
\vec{v_G} &= \vec{\omega} \wedge \vec{OG} \\
I_O\,\vec{\omega} &= \vec{OP} \wedge \left(m(\vec{\omega} \wedge \vec{OG}) - \vec{\Pi_O} \right)
\end{aligned}
$$

produit triple:

$$
\begin{aligned}
I_O\,\vec{\omega} &= m\,\vec{OP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OG}) - \vec{OP} \wedge \vec{\Pi_O} \\
&= m(\vec{OP} \bullet \vec{OG})\vec{\omega} - m(\vec{OP} \bullet \omega)\vec{OG} - \vec{OP} \wedge \vec{\Pi_O} \\
&= m(\vec{OP} \bullet \vec{OG})\vec{\omega} - 0 - \vec{OP} \wedge \vec{\Pi_O} \\
\left(I_O - md\left(\frac{1}{2}b\right)\right)\vec{\omega} &= -\vec{OP} \wedge \vec{\Pi_O}
\end{aligned}
$$

ainsi pour que $\Pi_O = 0$ il faut que

$$
\boxed{I_O - m\frac{d}{2}b = 0}
$$

utilisation de Steiner

$$
\begin{aligned}
I_O &= \frac{1}{12}(a^2 + b^2) + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{12}ma^2 + \frac{4}{12}mb^2 \approx \frac{1}{3}mb^2 \qquad \text{car } b >>> a
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
0 &= I_0 - md\frac{b}{2} \\
&= \frac{1}{3}mb^2 - md\frac{b}{2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{d = \frac{2}{3}b}$$

deuxième méthode en utilisant un repère et exprimant $\vec{\omega}$

$$
\begin{aligned}
\vec{OP} &= -d\,\hat{y} \\
\vec{\omega} &= \frac{1}{I_O}\,\vec{OP} \wedge \vec{\Pi}_P \\
\vec{\Pi}_P &= \Pi_P\,\hat{x} \\
\vec{\omega} &= \frac{d\,\Pi_P}{I_O}\,\hat{z} \\
\vec{OG} &= -\frac{1}{2}\,b\,\hat{y}
\end{aligned}
$$

deuxième méthode (suite et fin)...

$$
\begin{aligned}
m\vec{v_G} &= \vec{\Pi_P} + \vec{\Pi_O} \\
\vec{v_G} &= \vec{\omega} \wedge \vec{OG} \\
m\left(\frac{d\Pi_P}{I_O}\hat{z} \wedge \left(-\frac{1}{2}b\,\hat{y}\right)\right) = \vec{\Pi_P} + \vec{\Pi_O} &= \Pi_P\,\hat{x} \\
m\frac{d\Pi_P}{I_O}\frac{1}{2}b\,\hat{x} &= \Pi_P\,\hat{x} \\
\frac{mdb}{2I_O} - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{d = \frac{2I_O}{mb} = \frac{2}{mb}\frac{1}{3}mb^2 = \frac{2}{3}\,b}
$$

compléments

Compléments
forces internes et externes
centre de masse
lois générale
conséquence sur les chocs

Forces internes et forces externes

Forces internes
Toutes les forces provenant de l'interaction mutuelle des points matériels

$$\vec{F}^{\text{int}} := \sum_{\alpha,\beta} \vec{F}^{\alpha\to\beta}$$

Forces externes
Toutes les forces appliquées au système de points matériels qui ne sont pas des interactions mutuelles

$$\vec{F}^{\text{ext}} := \sum_{\alpha} \vec{F}^{\text{ext}}_{\alpha}$$

Résultante des forces

$$\vec{F} = \vec{F}^{\text{int}} + \vec{F}^{\text{ext}}$$

Quantité de mouvement et la loi 3 de Newton

La loi 3 de Newton...
implique que les interactions dues aux forces internes se neutralisent au niveau de leur contribution à la quantité de mouvement totale

Théorème de la quantité de mouvement

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F^{\text{ext}}}$$

avec $\vec{p} = \sum_\alpha \vec{p_\alpha} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v_\alpha}$

Quantité de mouvement et la loi 3 de Newton

Démonstration du théorème de la quantité de mouvement

La loi 2 appliquée à chaque point matériel α donne $\frac{d\vec{p_\alpha}}{dt} = \vec{F_\alpha}$ et donc

$$
\begin{aligned}
\sum_\alpha \frac{d\vec{p_\alpha}}{dt} &= \sum_\alpha \vec{F_\alpha} \\
\frac{d}{dt}\sum_\alpha \vec{p_\alpha} &= \sum_\alpha \vec{F_\alpha^{\text{int}}} + \sum_\alpha \vec{F_\alpha^{\text{ext}}} \\
\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F^{\text{int}}} + \vec{F^{\text{ext}}} \\
\frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum_{1\le\alpha<\beta\le N} \left(\vec{F^{\alpha\to\beta}} + \vec{F^{\beta\to\alpha}}\right) + \vec{F^{\text{ext}}} \\
\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{0} + \vec{F^{\text{ext}}}
\end{aligned}
$$

théorème du moment cinétique

Moment cinétique

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{M_O^{\text{ext}}}$$

Définition

$$\vec{M_O^{\text{ext}}} = \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F_\alpha^{\text{ext}}}$$

Démonstration du Thm. du moment cinétique

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L_O}}{dt} &= \vec{M_O} \\
&= \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F_\alpha} \\
&= \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge \left(\vec{F_\alpha^{\text{int}}} + \vec{F_\alpha^{\text{ext}}}\right) \\
&= \left(\sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge \left(\sum_{\beta\neq\alpha} \vec{F^{\beta\to\alpha}}\right)\right) + \vec{M_O^{\text{ext}}} \\
&= \sum_{1\leq\alpha<\beta\leq N} \left(\vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F^{\beta\to\alpha}} + \vec{OP}_\beta \wedge \vec{F^{\alpha\to\beta}}\right) + \vec{M_O^{\text{ext}}}
\end{aligned}$$

Démonstration du Thm. du moment cinétique (suite)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{L_O}}{dt} &= \sum_{1\leq\alpha<\beta\leq N} \left(\vec{OP_\alpha} \wedge \vec{F^{\beta\to\alpha}} + (\vec{OP_\alpha} - \vec{P_\alpha P_\beta}) \wedge \vec{F^{\alpha\to\beta}} \right) \\
&\quad + \vec{M_O^{\text{ext}}} \\
&= \sum \left(\vec{OP_\alpha} \wedge \vec{F^{\beta\to\alpha}} + \vec{OP_\alpha} \wedge \vec{F^{\alpha\to\beta}} - \vec{P_\alpha P_\beta} \wedge \vec{F^{\alpha\to\beta}} \right) \\
&\quad + \vec{M_O^{\text{ext}}} \\
&= \vec{0} + \vec{0} + \vec{M_O^{\text{ext}}} \\
&= \vec{M_O^{\text{ext}}}
\end{aligned}
$$

Loi 3 de Newton (action-réaction)

&

$\vec{F^{\alpha\to\beta}}$ est alignée avec la droite passant par P_α et P_β

centre de masse

Centre de masse

Théorème

$$\sum_{\alpha} m_\alpha \vec{GP}_\alpha = \vec{0}$$

Explication
Lorsqu'on se place au centre de masse (centre d'inertie), si on additionne tous les vecteurs qui relient le centre de masse aux points matériels, pondérés par la masse respective, on obtient le vecteur nul. Une conséquence importante est que la quantité de mouvement totale par rapport au référentiel centré sur le centre de masse est toujours nulle ($\vec{p'} = \vec{0}$ ci-dessous).

Démonstration

$$
\begin{aligned}
\sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha &= \sum_\alpha \left(m_\alpha (\vec{OP}_\alpha - \vec{OG}) \right) \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha - \sum_\alpha m_\alpha \vec{OG} \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha - (\sum_\alpha m_\alpha) \left(\frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha \right) \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha - M \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha - \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$

Quantité de mouvement totale et centre de masse

$$M := \sum_\alpha m_\alpha$$

Théorème du centre de masse

$$M \frac{d\vec{v_G}}{dt} = \vec{F^{ext}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\vec{OG} &= \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha \\
M\vec{v_G} &= M\frac{d\vec{OG}}{dt} = M\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha\right)
\end{aligned}$$

théorème du centre de masse

Démonstration (suite)

$$
\begin{aligned}
M\vec{v_G} &= \frac{M}{M}\sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{OP_\alpha}}{dt} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v_\alpha} = \vec{p} \\
M\frac{d\vec{v_G}}{dt} &= \dot{\vec{p}} = \vec{F^{\text{ext}}}
\end{aligned}
$$

On a utilisé le résultat déjà établi $\dot{\vec{p}} = \vec{F^{\text{ext}}}$

Vitesses relatives au centre de masse

$$\vec{v'_\alpha} := \vec{v_\alpha} - \vec{v_G} = \frac{d\vec{GP_\alpha}}{dt}$$

Théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel du centre de masse

$$\vec{p'} := \sum_\alpha m_\alpha \vec{v'_\alpha} = \vec{0}$$

Démonstration

$$\vec{p'} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v'_\alpha} = \sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{GP_\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{GP_\alpha}\right) = \vec{0}$$

loi de Newton pour un point A général

$$\begin{aligned}
\vec{L_A} &= \sum_\alpha \vec{AP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v_\alpha} \\
\vec{M_A} &= \sum_\alpha \vec{AP}_\alpha \wedge \vec{F_\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L_A}}{dt} &= \sum_\alpha \dot{\vec{AP}}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v_\alpha} = \sum_\alpha \vec{AP}_\alpha \wedge m_\alpha \dot{\vec{\alpha}} \\
&= \sum_\alpha (\dot{\vec{OP}}_\alpha - \dot{\vec{OA}}) \wedge m_\alpha \vec{v_\alpha} + \sum_\alpha \vec{AP}_\alpha \wedge \vec{F_\alpha} \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \vec{v_\alpha} \wedge \vec{v_\alpha} - \vec{v_A} \wedge \sum_\alpha m_\alpha \vec{v_\alpha} + \vec{M_A} \\
&= -\vec{v_A} \wedge \sum_\alpha m_\alpha \vec{v_\alpha} + \vec{M_A} \\
&= M\,(\vec{v_G} \wedge \vec{v_A}) + \vec{M_A}
\end{aligned}$$

loi de Newton au centre de masse

comme pour $\vec{L_A}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{L_G}}{dt} &= \sum_\alpha \dot{\vec{GP}}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v_\alpha} + \sum_\alpha \vec{GP}_\alpha \wedge m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \\
&= \sum_\alpha \dot{\vec{OG}} \wedge m_\alpha \dot{\vec{OP}}_\alpha + \vec{M}_G
\end{aligned}
$$

en utilisant $\sum_\alpha \vec{GP}_\alpha = 0$ après avoir décomposé $\dot{\vec{OP}}_\alpha = \dot{\vec{OG}} + \dot{\vec{GP}}_\alpha$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{L_G}}{dt} &= \sum_\alpha \dot{\vec{OG}} \wedge m_\alpha \dot{\vec{OP}}_\alpha + \vec{M}_G \\
&= \sum_\alpha \dot{\vec{OG}} \wedge m_\alpha \dot{\vec{OG}} + \dot{\vec{OG}} + \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha + \vec{M}_G \\
&= 0 + 0 + \vec{M}_G
\end{aligned}
$$

conséquence
lois de Newton des chocs

lois de Newton des chocs

lois de Newton des chocs

La loi

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = M_O^{\text{ext}}$$

devient

$$\boxed{L_O^{(+)} - L_O^{(-)} = \sum_\alpha \vec{OP_\alpha} \wedge \Pi_\alpha^{\text{ext}}}$$

lois de Newton des chocs

La loi

$$\frac{d\vec{L_G}}{dt} = M_G^{\text{ext}}$$

devient

$$\boxed{L_G^{(+)} - L_G^{(-)} = \sum_\alpha \vec{GP}_\alpha \wedge \Pi_\alpha^{\text{ext}}}$$

lois de Newton des chocs

La loi

$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = M(\vec{v}_G \wedge \vec{v_A}) + M_A^{\text{ext}}$$

devient

$$\boxed{L_A^{(+)} - L_A^{(-)} = \sum_{\alpha} A\vec{P}_\alpha \wedge \Pi_\alpha^{\text{ext}}}$$

car

$$\lim_{\bar{t}\to 0} \int_0^{\bar{t}} M(\vec{v_G} \wedge \vec{v_A})dt = 0$$