III. oscillateur harmonique I

le ressort, l'oscillateur à ressort, le pendule simple, le mouvement harmonique

Ph. Müllhaupt

Programme — III. oscillateur harmonique I

1. loi de Hooke
2. équations différentielles du mouvement
3. intégration des équations différentielles
4. le pendule simple

   première méthode: repère fixe

   deuxième méthode: repère mobile

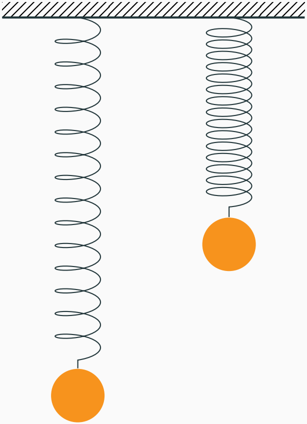
   3 ème méthode: les moments

   approximation des petits angles

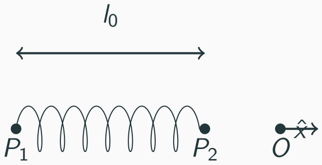
   autre méthode pour obtenir la solution de l'oscillateur harmonique

loi de Hooke

loi de Hooke



loi de Hooke



$$
\begin{aligned}
\vec{F}^{2\to 1} &= -\vec{F}^{1\to 2} \\
\vec{F}^{1\to 2} &= -k(l-l_0)\,\hat{x} \\
\vec{F}^{1\to 2} &= -k(l-l_0)\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|} = -k\left(\overrightarrow{P_1P_2} - l_0\widehat{P_1P_2}\right)
\end{aligned}
$$

formule de la force du ressort

On note

$$\vec{F}^{A\to B}$$

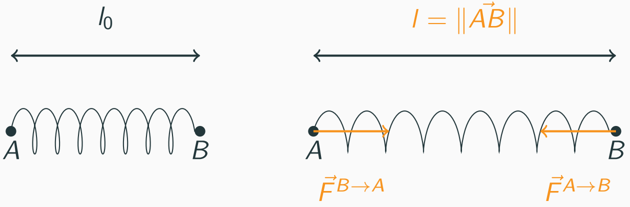
la force dont "la cause" se trouve au point A
la force est liée au point B et agit ainsi au point B.

pour le ressort

$$\boxed{\vec{F}^{A\to B} = -k(\overrightarrow{AB} - l_0\widehat{AB})}$$

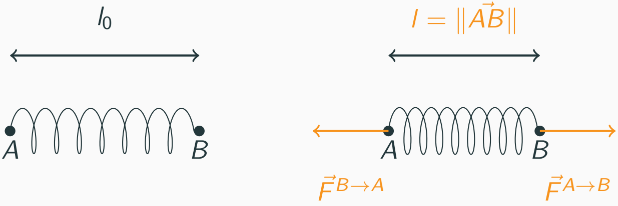
une force apparaît toujours aux deux extrémités du ressort et on a

$$\vec{F}^{A\to B} = -\vec{F}^{B\to A}$$



La même formule est valable en compression également

$$\boxed{\vec{F}^{A\to B} = -k(\overrightarrow{AB} - l_0\widehat{AB})}$$



Remarque: $\vec{F}^{B\to A}$ obéit à la troisième loi de Newton (action-réaction) car la formule donne

$$\boxed{\vec{F}^{B\to A} = -k(\overrightarrow{BA} - l_0\widehat{BA}) = -\vec{F}^{A\to B}}$$

équations différentielles du mouvement

équation différentielles du mouvement

En 1D:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= m\vec{a} \\
\vec{F}^{O\to P} &= m\,\ddot{\overrightarrow{OP}} \\
-k(\overrightarrow{OP} - l_0\widehat{OP}) &= m\ddot{\overrightarrow{OP}} \\
-k(x\,\hat{x} - l_0\,\hat{x}) &= m\ddot{x}\,\hat{x}
\end{aligned}
$$

les $\hat{x}$ se simplifient et en divisant par m:

$$
\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - l_0)}
$$

changement de variable

$$\boxed{e \triangleq x - l_0}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= \dot{x} \qquad \text{car } l_0 \text{ est constant} \\
\ddot{e} &= \ddot{x} \\
&= -\frac{k}{m}(x - l_0) \\
&= -\frac{k}{m}e
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{e} = -\frac{k}{m}e}$$

on a obtenu <u>une équation homogène</u>, qui comprend que la variable e et ses dérvées $\dot{e}$, $\ddot{e}$ dans chaque terme (il n'y a plus le terme $+\frac{k}{m}l_0$).

Définition de l'oscillateur harmonique

Tout système équivalent à un point matériel astreint à se déplacer en ligne droite et soumis à une force de rappel proportionnelle à la distance à un point fixe sur cette droite.

intégration des équations différentielles

solution de l'équation différentielle

$$e(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

démonstration

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= -C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{k}{m}}C_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
\ddot{e}(t) &= -C_1\frac{k}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - C_2\frac{k}{m}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
\ddot{e}(t) &= -\frac{k}{m}\left(C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) \\
\ddot{e}(t) &= -\frac{k}{m}e(t)
\end{aligned}$$

les conditions initiales

$$\begin{aligned} e(0) &= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) = C_1 \\ \dot{e}(0) &= -C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) + C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) = C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

solution complète

$$e(t) = x - l_0 \quad = \quad e(0)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{m}{k}}\dot{e}(0)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

les paramètres du mouvement oscillatoire masse-ressort

la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad [\mathrm{rad/s}]$$

la fréquence

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad [1/\mathrm{s}] = [\mathrm{Hz}]$$

la période

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad [\mathrm{s}]$$

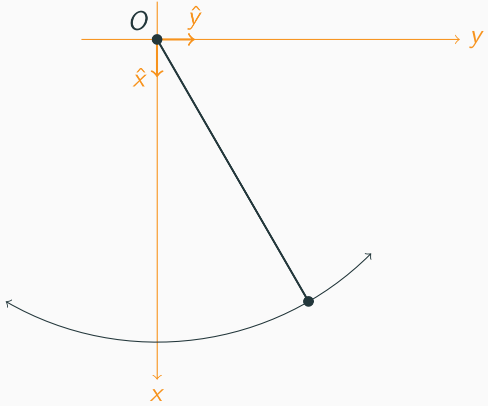
le pendule simple

1 ère méthode de modélisation
repère fixe

1. référentiel et repère

le référentiel est le plan fixe (ou en translation uniforme)

repère fixe et centré en O



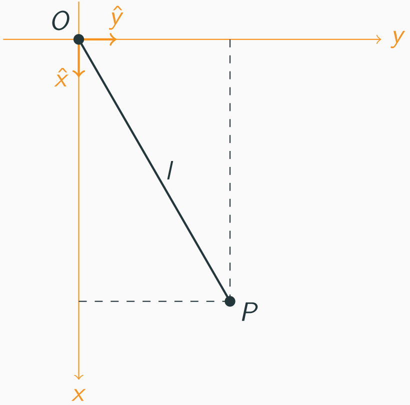
l'axe x est dirigé vers le bas et O est fixé sur le centre de rotation

2. coordonnées et liaison

coordonnées: x et y

$\vec{OP} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$

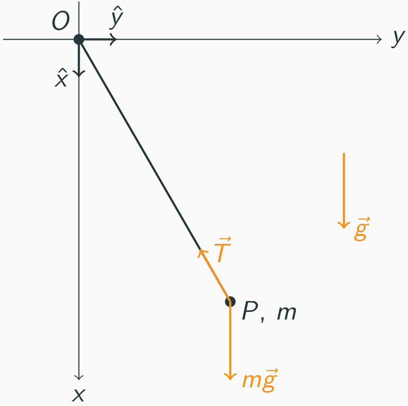
liaison: $x^2 + y^2 = l^2$



force gravifique: $m\vec{g} = mg\,\hat{x}$

force de liaison: $\vec{T} = T_x\,\hat{x} + T_y\,\hat{y}$

dirigée dans le sens du fil: $\frac{T_x}{T_y} = \frac{x}{y}$



$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\,\vec{a} \\ m\,\vec{g} + \vec{T} &= m\,\vec{a} \end{aligned}$$

5. équations différentielles du mouvement

$$
\begin{aligned}
m\,\vec{g} + \vec{T} &= m\,\vec{a} \\
m\,g\,\hat{x} + T_x\,\hat{x} + T_y\hat{y} &= m\,\ddot{x}\,\hat{x} + m\,\ddot{y}\,\hat{y} \\
T_x y &= T_y x
\end{aligned}
$$

il faut également dériver la liaison 2 fois:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= l^2 \\
x\,\dot{x} + y\,\dot{y} &= 0 \\
x\,\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= m\,g + T_x \\
m\ddot{y} &= T_y \\
T_x\,y &= T_y\,x \\
0 &= x\,\ddot{x} + y\,\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2
\end{aligned}$$

système différentiel algébrique
inconnues: T_x, T_y, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, 4 inconnues et 4 équations

cela devient plus clair ... avec θ

une coordonnée libre θ au lieu des coordonnées liées x et y

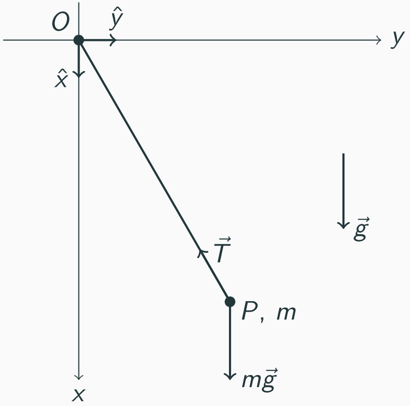
$$
\begin{aligned}
x &= l\cos\theta \\
y &= l\sin\theta
\end{aligned}
$$

la liaison est automatiquement satisfaite

$$x^2 + y^2 = (l\cos\theta)^2 + (l\sin\theta)^2 = l^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = l^2$$

On introduit la variable T (inconnue pouvant être négative) de telle sorte que

$$
\begin{aligned}
T_x &= T\ \cos\theta \\
T_y &= T\ \sin\theta
\end{aligned}
$$



exprimons $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ en fonction de $\ddot{\theta}$...

$$
\begin{aligned}
x &= l\cos\theta \\
y &= l\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -l\sin\theta\,\dot{\theta} \\
\dot{y} &= l\cos\theta\,\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -l\sin\theta\,\ddot{\theta} - l\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \\
\ddot{y} &= l\cos\theta\,\ddot{\theta} - l\sin\theta\,\dot{\theta}^2
\end{aligned}
$$

en remplaçant dans les équations différentielles...

$$
\begin{aligned}
m\,\ddot{x} &= mg + T_x = mg + T\cos\theta \\
m\,\ddot{y} &= T_y = T\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-ml\sin\theta\ddot{\theta} - ml\cos\theta\dot{\theta}^2 &= mg + T\cos\theta \qquad (1) \\
ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 &= T\sin\theta \qquad (2)
\end{aligned}
$$

effectuons: (1) $\times \sin\theta$ $-$ (2) $\times \cos\theta$:

$$\ddot{\theta}\,\left(-ml\sin^2\theta - ml\cos^2\theta\right) = -ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta$$

en simplifiant par m et en utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on a:

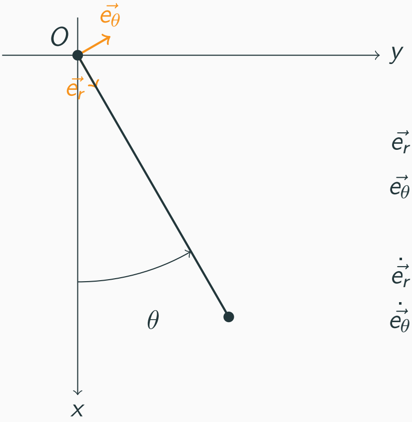
$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\sin\theta}$$

2 ème méthode de modélisation
repère mobile

1. référentiel et repère

le référentiel est le plan fixe (ou en translation uniforme)

on ajoute un repère mobile $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$



$$
\begin{aligned}
\vec{e_r} &= \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta \\
\vec{e_\theta} &= -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{e_r}} &= -\hat{x}\sin\theta\dot{\theta} + \hat{y}\cos\theta\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \\
\dot{\vec{e_\theta}} &= -\hat{x}\cos\theta\dot{\theta} - \hat{y}\sin\theta\,\dot{\theta} = -\dot{\theta}\,\vec{e_r}
\end{aligned}
$$

2. coordonnées et liaisons

coordonnée: θ

liason du fil de longueur constante donne une force de liaison, mais pas de liaison sur la coordonnée θ

si on considère deux coordonnées θ et r, alors la liaison s'exprime comme $r = l$, la longueur du fil

3. modèle de force

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\\ \hat{y} &= \sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}\end{aligned}$$

gravité:

$$\vec{g} = g\hat{x} = g\cos\theta\,\vec{e_r} - g\sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

force de liaison (dans la direction du fil, T inconnu)

$$\vec{T} = T\,\vec{e_r}$$

4. lois de Newton

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\,\vec{a} \\ m\vec{g} + \vec{T} &= m\,\ddot{\vec{OP}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= l\,\vec{e_r} \\ \dot{\vec{OP}} &= l\,\dot{\vec{e_r}} = l\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \\ \ddot{\vec{OP}} &= \frac{d}{dt}(l\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}) = l\ddot{\theta}e_\theta + l\dot{\theta}\dot{\vec{e_\theta}} \\ &= l\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} \end{aligned}$$

5. équations différentielles du mouvement

$$
\begin{aligned}
T\,\vec{e_r} + mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta} &= m\,\ddot{\vec{OP}} \\
&= m\big(l\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
mg\cos\theta\,\vec{e_r} + T\,\vec{e_r} &= -ml\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} \\
-m\,g\,\sin\theta\,\vec{e_\theta} &= ml\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}
\end{aligned}
$$

on trouve la force de liaison

$$\boxed{T = -ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta}$$

et l'équations différentielle pour θ

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\sin\theta}$$

remarque...

on trouve la même force avec le repère fixe, à condition d'effectuer

$$(1) \times \cos\theta + (2) \times \sin\theta$$

$$\boxed{T = -ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta}$$

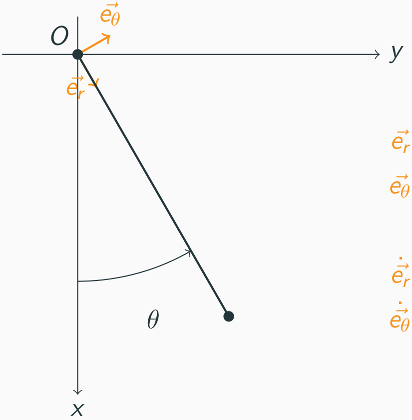
3 ème méthode de modélisation
méthode des moments

1. référentiel et repère

le référentiel est le plan fixe (ou en translation uniforme)

on ajoute un repère mobile $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

on ajoute $\hat{z}$ qui sort du plan, $\hat{z} = \hat{x} \wedge \hat{y} = \vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta}$



$$
\begin{aligned}
\vec{e_r} &= \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta \\
\vec{e_\theta} &= -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{e_r}} &= = -\hat{x}\sin\theta\dot{\theta} + \hat{y}\cos\theta\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \\
\dot{\vec{e_\theta}} &= -\hat{x}\cos\theta\dot{\theta} - \hat{y}\sin\theta\,\dot{\theta} = -\dot{\theta}\,\vec{e_r}
\end{aligned}
$$

2. coordonnées et liaison, cinématique

coordonnée: θ

liaison du fil, donne une force mais pas déquation de liason sur la coordonnée θ

cinématique

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= l\,\vec{e_r} \\ \dot{\vec{OP}} &= l\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \end{aligned}$$

formule de Poisson

$$\dot{\vec{e_r}} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = \dot{\theta}\,(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}) = -\dot{\theta}\begin{vmatrix} \hat{x} & \cos\theta \\ \hat{y} & \sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{e_r}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & 0 & \cos\theta \\ \hat{y} & 0 & \sin\theta \\ \hat{z} & \dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \wedge \vec{e_r}$$

force gravifique:

$$m\vec{g} = mg\,\hat{x} = -mg\sin\theta\,\vec{e_\theta} + mg\cos\theta\,\vec{e_r}$$

force de liaison:

$$\vec{T} = T\,\vec{e_r}$$

moment de force $\vec{M_O}$

$$\begin{aligned}
\vec{M_O} &= \vec{OP} \wedge m\vec{g} + \vec{OP} \wedge \vec{T} \\
&= (l\,\vec{e_r}) \wedge mg\hat{x} + (l\,\vec{e_r}) \wedge (T\,\vec{e_r}) \\
&= (l\,\vec{e_r} \wedge mg(-\sin\theta\,\vec{e_\theta} + \cos\theta\,\vec{e_r}) \\
&= mgl\sin\theta(\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_r}) \\
&= -mgl\sin\theta\,\hat{z}
\end{aligned}$$

calcul du moment de force avec un déterminant

$$\begin{aligned}
\vec{M_O} &= \vec{OP} \wedge (m\vec{g} + \vec{T}) \\
&= l\vec{e_r} \wedge (mg\hat{x} - T\vec{e_r}) \\
&= l\vec{e_r} \wedge mg\hat{x} \\
&= l(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) \wedge mg\hat{x} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ l\cos\theta & l\sin\theta & 0 \\ mg & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} l\cos\theta & l\sin\theta \\ mg & 0 \end{vmatrix}\hat{z} \\
&= -mgl\sin\theta\hat{z}
\end{aligned}$$

moment cinétique $\vec{L_O}$

$$
\begin{aligned}
\vec{L_O} &= \vec{OP} \wedge m\vec{v_P} \\
&= l\vec{e_r} \wedge ml\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \\
&= ml^2\dot{\theta}\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} \\
&= ml^2\dot{\theta}\,\hat{z}
\end{aligned}
$$

remarque: inertie du pendule $m\,l^2$ [kg m^2]

4. loi de Newton

$$\boxed{\frac{d}{dt}\,\vec{L_O} = \vec{M_O}}$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}\hat{z}) \quad = \quad -mgl\sin\theta\hat{z}$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta}$$

remarque: la méthode des moments ne permet pas de calculer la tension $\vec{T}$ dans le fil !

approximation des petits angles

Lorsque θ est petit et exprimé en [rad] on a

$$\boxed{\sin\theta \approx \theta \qquad\qquad \cos\theta \approx 1}$$

de telle sorte que l'équation différentielle devient analogue à celle de la masse muni d'un ressort (même structure de l'équation, donc solution de même structure, il faut juste remplacer les variables $x \to \theta$, $k \to g$, $m \to l$):

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

comparaison avec l'oscillateur masse-ressort

L'équation différentielle du pendule masse-ressort:

$$\ddot{e} = -\frac{k}{m} e$$

dont la solution est avec $e = x - l_0$

$$e(t) = e(0)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + \sqrt{\frac{m}{k}}\, \dot{e}(0)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

est analogue à celle du pendule simple pour les petits angles θ:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\, \theta$$

Ainsi la solution du pendule pour des petits angles θ est par analogie:

$$\theta(t) = \theta(0)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) + \sqrt{\frac{l}{g}}\, \dot{\theta}(0)\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$$

Les paramètres du pendule simple à petits angles

la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad [\mathrm{rad/s}]$$

la fréquence

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad [1/\mathrm{s}] = [\mathrm{Hz}]$$

la période

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad [\mathrm{s}]$$

avec les nombres complexes...

soit à résoudre

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Posons $x(t) = Ce^{st}$ **avec** $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\
Cs^2e^{st} + \frac{k}{m}Ce^{st} &= 0 \\
\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)Ce^{st} &= 0
\end{aligned}$$

conditions

Comme $e^{st} \neq 0$ on a soit $C = 0$ (inutile) soit $C \neq 0$ et

$$s = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ainsi, par principe de superposition (linéarité de l'équation différentielle)

$$x(t) = \tilde{C}_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \tilde{C}_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

avec $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{C}$.

paramétrisation réelle des constantes d'intégration

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1 &= \frac{a+ib}{2}\\ \tilde{C}_2 &= \frac{a-ib}{2}\end{aligned}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$

regroupement

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{a+ib}{2}e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{a-ib}{2}e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\
&= a\frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2} - b\frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2j}
\end{aligned}
$$

solution

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - b\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
a &= x(0) \\
b &= -\sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0)
\end{aligned}
$$