II. Newton - balistique

Les 3 lois de Newton avec application à la balistique du point matériel

Ph. Müllhaupt

Programme — II. Newton, balistique

1. lois de Newton

   loi 1: persévérance du mouvement

   loi 2: force

   loi 3: action-réaction
2. moments

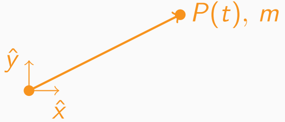
   moment de force

   moment cinétique
3. centre de masse
4. balistique

   sans frottement

   avec frottement
5. théorème du centre de masse
6. problème à deux corps

lois de Newton



$\vec{OP} = \vec{r}$ est le rayon vecteur

Le point P est matériel. Il a donc une masse m.
La dynamique introduit des contraintes sur la deuxième dérivée de la cinématique en rapport avec les masses en jeu.

loi 1: persévérance du mouvement (en absence de force)

En d'autres termes, il ne faut "rien faire" pour maintenir un mouvement rectiligne à vitesse constante dans un référentiel galiléen.
(Référentiel galilélen $\equiv$ référentiel au repos ou en translation uniforme.)

Ce concept ne faisait pas l'unanimité avant Newton !

loi 2: la force

La force est introduite pour caractériser la modification du mouvement. Le mouvement instantané est résumé par le concept de la quantité de mouvement qui est une fonction des masses et des vitesses en jeu. L'équation qui gouverne la modification du mouvement est:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

Pour un point matériel, la quantité de mouvement est

$$\vec{p} \triangleq m\,\vec{v}$$

et comme la masse est constante en mécanique classique

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

loi 3: action-réaction

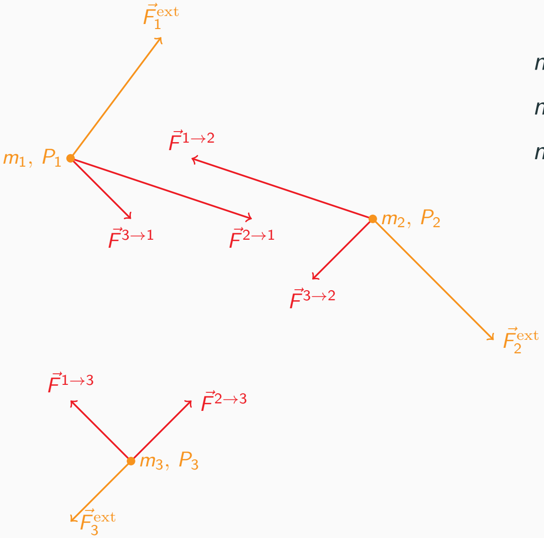
$$\begin{aligned} \vec{F}'^{\,1\to 2} &= -\vec{F}'^{\,2\to 1} \\ \vec{F}^{2\to 1} &\neq -\vec{F}^{1\to 2} \end{aligned}$$

Dans une action mutuelle, l'action est toujours égale à la réaction (au sens de l'intensité des forces) et est dirigée en sens contraire.

remarque concenrant les lois 2 et 3

Les forces qui s'exercent sur un points s'additionnent vectoriellement. Ainsi, plusieurs causes peuvent contribuer à la modification du mouvement du point matériel, et les causes/conséquences se somment vectoriellement.

illustration



$$\begin{aligned} m_1\,\dot{\vec{v}}_1 &= \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}^{2\to1} + \vec{F}^{3\to1} \\ m_2\,\dot{\vec{v}}_2 &= \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}^{1\to2} + \vec{F}^{3\to2} \\ m_3\,\dot{\vec{v}}_3 &= \vec{F}_3^{\text{ext}} + \vec{F}^{2\to3} + \vec{F}^{1\to3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}^{i\to j} = -\vec{F}^{j\to i} \quad i \neq j}$$

moments

moment de force

Un ensemble de forces appliquées en des points différents a une tendance à faire tourner le solide lié aux points d'application des forces.

Le concept associé s'appelle le moment de force.

intuition

Pour une force unique $\vec{F}_P$ appliquée au point P, le moment de force mesure la tendance à tourner le point P autour d'un point O donné en <u>considérant $\vec{OP}$</u> comme rigide.

Le moment de force correspond à la surface orientée du parallélogramme construit avec un côté $\vec{OP}$ et l'autre côté $\vec{F}$.

formule de définition du moment de force

$$\boxed{\vec{M}_O \triangleq \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha}$$

moment cinétique

C'est un concept analogue mathématiquement à celui du moment de force, mais pour décrire quelque chose de différent. Mathématiquement, on replace les forces par les quantités de mouvement dans la formule de définition.

intuition

quantité de mouvement

Pour un point matériel, c'est le produit de la masse par la vitesse $\vec{p} = m\vec{v}$. La quantité de mouvement traduit "la capacité" à résister instantanément au changement de vitesse de translation. C'est ce que l'on pourrait sentir instantanément comme tendance au déplacement de translation et à résister à un changment de direction et d'intensité de translation.

moment cinétique

Le moment cinétique $\vec{L}_O$ exprime la capacité de l'ensemble considéré comme un solide à résister à la mise en rotation autour du point O. C'est ce que l'on pourrait sentir instantanément comme tendance à tourner et résister à tout changement autour de O. L'axe de rotation de résistance est l'axe de support de $\vec{L}_O$. La longueur $\|\vec{L}_O\|$ mesure l'intensité du phénomène.

$$\boxed{\vec{L}_O \triangleq \sum_{\alpha} \vec{OP}_\alpha \wedge (m_\alpha \, \vec{v}_\alpha)}$$

loi de Newton pour la rotation

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{M}_O}$$

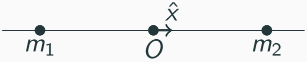
démonstration pour un point matériel unique

C'est une conséquence de la loi 2 de Newton et de la règle de Leibniz appliquée au produit vectoriel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{L_O} &= \\
\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge (m_\alpha\,\vec{v}_\alpha)\right) &= \sum_\alpha \dot{\vec{OP}}_\alpha \wedge m_\alpha\,\vec{v}_\alpha + \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge\ m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \\
&= \underbrace{\sum_\alpha \vec{v}_\alpha \wedge\ m_\alpha \vec{v}_\alpha}_{0} + \underbrace{\sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha}_{\vec{M_O}} \\
&= \vec{M_O}
\end{aligned}$$

centre de masse

centre de masse



exemple numérique:

$m_1 = 1$ [kg]
$m_2 = 3$ [kg]
distance 30 [cm]

On s'attend à trouver le centre de masse plus de proche de m_2 que de m_1.

C'est le point dont la dynamique obéit à celle d'un point unique où toute la masse est concentrée et accéléré en raison proportionnelle à la masse totale par la résultante des forces (théorème du centre de masse).

<u>idée:</u> prendre la moyenne des distances pondérées par les masses:

$$\boxed{\vec{OG} \triangleq \frac{1}{\sum_\alpha m_\alpha} \sum_\alpha m_\alpha \, \vec{OP}_\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\vec{OP}_1 &= 0\,\hat{x} \\
\vec{OP}_2 &= 30\,\hat{x} \\
\vec{OG} &= \frac{m_1\,\vec{OP}_1 + m_2\,\vec{OP}_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{1 \times 0\,\hat{x} + 3 \times 30\,\hat{x}}{3+1} \\
&= \frac{90}{4}\,\hat{x} = 22.5\,\hat{x}
\end{aligned}$$

le centre de masse ne dépend pas de l'origine $O^{'}$ ou O

$$
\begin{aligned}
\vec{O'G} &= \frac{m_1\,\vec{O'P_1} + m_2\,\vec{O'P_2}}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{1 \times 10 + 3 \times 40}{1+3}\,\hat{x} \\
&= 32.5\,\hat{x} = (10 + 22.5)\hat{x}
\end{aligned}
$$

balistique

étapes de la mise en équation et de la résolution

1. référentiel et repère
2. coordonnées et liaisons
3. forces en présence, modèle de force
4. lois de Newton
5. écrire les équations du mouvement
6. résoudre les équation et/ou déterminer les constantes du mouvement
7. répondre aux questions posées en relation avec le mouvement

balistique sans frottement

1. référentiel et repère

Le référentiel est le labortaoire et on y place un repère droit $(O, \hat{x}, \hat{y}\hat{z})$.

2. coordonnées et liasons

Les coordonnées sont:

x	position selon le vecteur $\hat{x}$ (par exemple la position horizontale)
y	position selon le vecteur unitaire $\hat{y}$ (par exemple la position latérale)
z	position selon le vecteur unitaire $\hat{z}$ (par exemple la position verticale)

$$\vec{OP} = \vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

3. forces en présence — modèle de force

- forces issues de la gravité
- champs de force proportionnel à la masse m
- constant en direction et intensité pour une masse donnée

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\,\vec{g} \\ \vec{g} &= -g\,\hat{z} = -9.81\,\hat{z} \end{aligned}$$

Attention à l'orientation du vecteur $\hat{z}$ pour exprimer $\vec{g}$!

4. équations du mouvement — lois de Newton

La loi de Newton

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

donne 3 équation différentielles du mouvement qui comporte les double dérivéss des coordonnées $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ car le repère est immobile.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\,g \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -\,g \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= 0 \\
\int (\ddot{x}) &= \int 0 \\
\dot{x}_1 + \tilde{C}_1 &= \tilde{C}_2 \\
\dot{x}_1 &= C_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= C_1 \\
\int (\dot{x}_1) &= \int C_1 \\
x + D &= C_1 t + E
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x(t) = C_1 t + C_2}$$

$\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, C_1, C_2, D, E sont toutes des constantes d'intégration, leur indépendance est égale à l'ordre (total) des équations différentielles.

L'équation pour le mouvement en y est analogue à celle pour le mouvement en x (avec des nouvelles constantes d'intégration)

$$\boxed{y(t) = C_3 t + C_4}$$

Par contre, c'est différent pour le mouvement en z

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -g \\ \dot{z} &= -gt + C_5 \end{aligned}$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_5 t + C_6}$$

interprétation des constantes d'intégration — conditions initiales

Les constantes d'intégration permettent de tenir compte (spécifier) les conditions initiales du mouvement, ou, plus précisément, à chaques conditions initiales correspond une solution unique des équations différentielles. Les constantes d'intégration permettent de distinguer (différentier) les solutions (les équations horaires).

$$
\begin{aligned}
x(0) \text{ et } \dot{x}(0) \quad &\rightarrow \quad \text{déterminent } C_1 \text{ et } C_2 \\
y(0) \text{ et } \dot{y}(0) \quad &\rightarrow \quad \text{déterminent } C_3 \text{ et } C_4 \\
z(0) \text{ et } \dot{z}(0) \quad &\rightarrow \quad \text{déterminent } C_5 \text{ et } C_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \dot{x}(0)\, t + x(0) \\
y(t) &= \dot{y}(0)\, t + y(0)
\end{aligned}
$$

justification pour le mouvement en x:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = C_1 \times 0 + C_2 \quad &\Rightarrow \quad C_2 = x_0 \\ \dot{x}(t) = C_1 \qquad \dot{x}(0) = C_1 \quad &\Rightarrow \quad C_1 = \dot{x}_0 = \dot{x}(0) \end{aligned}$$

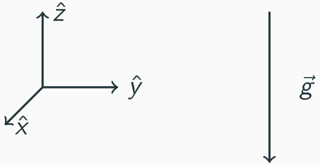
idem pour le mouvement en y

balistique avec frottement

1. référentiel et repère

Le repère est en 3D, $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

L'orientation du repère par rapport à la gravité est fondamental:



2. coordonnées et liason

Les coordonnées sont x, y, et z de telle sorte que le rayon vecteur s'écrit

$$\boxed{\vec{r} = \vec{OP} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}}$$

Il n'y a pas de liaison (pas de contrainte entre les coordonnées x,y, et z).

3. forces en présence — modèle de force

Il y a deux types de forces, la force de pesanteur et le frottement:

- La force de pesanteur: $m\,\vec{g}$
- La force de frottement qui s'oppose à la vitesse: $\vec{F}_f = -b\vec{v} = -b\|\vec{v}\|\,\hat{v}$

Il y a uniquement de la translation et une seule formule vectorielle résultante des lois de Newton:

$$\boxed{m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{F}_f}$$

Remarque: en notation vectorielle tous les signes sont $+$. L'orientation viendra lorsqu'on exprimera les vecteurs à l'aide du repère !

5. équations différentielles du mouvement

Pour obtenir des équations différentielles on remplace $\vec{a}$ par les deuxième dérivées des coordonnées, et on remplace $\vec{v}$ par les première dérivées des coordonnées.

$$m\,\vec{a} \quad = \quad m\vec{g} + \vec{F}_f$$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\,g \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

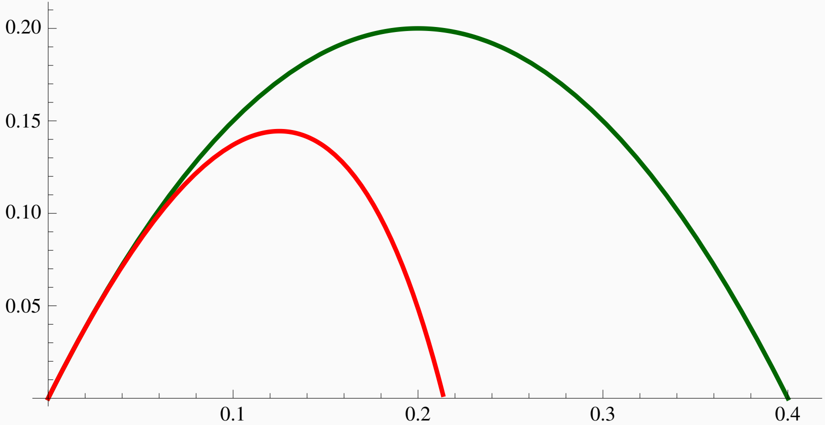
que l'on récrit sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} = -g - \frac{b}{m}\dot{z} \end{cases}$$

6. résolution des équations du mouvement

La résolution des équations diffŕentielles s'effectuera lors de la résolution de l'oscillateur harmonique II. On présentera une partie de cette solution avec l'exercice d'assimilation de la théorie !

trajectoires avec et sans frottement



théorèmes et compléments

Centre de masse (centre d'inertie)

définition du centre de masse (appelé également centre d'inertie)

$$\vec{OG} := \frac{1}{\sum_\alpha m_\alpha} \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha$$

théorème

G est indépendant de O

Démonstration

avec $M := \sum_\alpha m_\alpha$

$$\begin{aligned}
\vec{O'G'} &= \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{O'P_\alpha} = \frac{1}{M}\sum m_\alpha \vec{O'O} + \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{OP_\alpha} \\
&= \left(\frac{1}{\sum_\alpha m_\alpha}(\sum_\alpha m_\alpha)\right)\vec{O'O} + \vec{OG} \\
&= \vec{O'O} + \vec{OG} \\
&= \vec{O'G} \\
\Rightarrow & \qquad G = G'
\end{aligned}$$

théorème du centre de masse

théorème du centre de masse

théorème

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \ddot{\vec{OG}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i^{\text{ext}}}$$

démonstration

loi 2 de Newton:

$$m_i \ddot{\vec{OP_i}} = \sum_{j=1 \neq i}^{N} \vec{F^{j \to i}} + \vec{F_i^{\text{ext}}}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{OP_i}}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1 \neq i}^{N} \vec{F^{j \to i}} + \vec{F_i^{\text{ext}}}\right)$$

théorème du centre de masse

démonstration (suite)

Mais par la loi 3 (action = réaction)

$$\vec{F}^{j\to i} = -\vec{F}^{i\to j} \qquad i \neq j$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{OP}}_i \right) &= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1 \neq i}^{N} \vec{F}^{j\to i} + \vec{F}_i^{\text{ext}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{ext}}
\end{aligned}$$

démonstration (suite)

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(m_i \ddot{\vec{OP_i}}\right)}{\sum_{i=1}^{N} m_i} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i^{\text{ext}}} \\
\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \ddot{\vec{OG}} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i^{\text{ext}}}
\end{aligned}$$

théorème

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{GP}_{\alpha} = \vec{0}$$

explication

Lorsqu'on se place au centre de masse (centre d'inertie), si on additionne tous les vecteurs qui relient le centre de masse aux points matériels, pondérés par la masse respective, on obtient le vecteur nul. Une conséquence importante est que la quantité de mouvement totale par rapport au référentiel centré sur le centre de masse est toujours nulle ($\vec{p'} = \vec{0}$ ci-dessous).

démonstration

$$
\begin{aligned}
\sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha &= \sum_\alpha \left(m_\alpha (\vec{OP}_\alpha - \vec{OG}) \right) \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha - \sum_\alpha m_\alpha \vec{OG} \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha - (\sum_\alpha m_\alpha) \left(\frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha \right) \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha - M \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha - \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$

quantité de mouvement totale et centre de masse

$$M := \sum_\alpha m_\alpha$$

Théorème du centre de masse

$$M \frac{d\vec{v_G}}{dt} = \vec{F^{\text{ext}}}$$

démonstration

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha \\ M\vec{v_G} &= M \frac{d\vec{OG}}{dt} = M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{OP}_\alpha \right) \end{aligned}$$

théorème du centre de masse

démonstration (suite)

$$\begin{aligned} M\vec{v_G} &= \frac{M}{M}\sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{OP_\alpha}}{dt} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v_\alpha} = \vec{p} \\ M\frac{d\vec{v_G}}{dt} &= \dot{\vec{p}} = \vec{F^{\text{ext}}} \end{aligned}$$

On a utilisé le résultat déjà établi $\dot{\vec{p}} = \vec{F^{\text{ext}}}$

vitesses relatives au centre de masse

$$\vec{v'_\alpha} := \vec{v_\alpha} - \vec{v_G} = \frac{d\,\vec{GP}_\alpha}{dt}$$

Théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel du centre de masse

$$\vec{p'} := \sum_\alpha m_\alpha \vec{v'_\alpha} = \vec{0}$$

démonstration

$$\vec{p'} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v'_\alpha} = \sum_\alpha m_\alpha \frac{d\,\vec{GP}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha\right) = \vec{0}$$

problème à deux corps

Deux corps interagissent et sont soumis à des forces extérieurs.

équations du mouvement

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\vec{r_1}} &= \vec{F^{2\to 1}} + \vec{F_1^{\text{ext}}} \\
m_2 \ddot{\vec{r_2}} &= \vec{F^{1\to 2}} + \vec{F_2^{\text{ext}}}
\end{aligned}
$$

nouveau repère

centre de masse $\vec{r_G} = \vec{OG}$

$$\vec{r_G} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

axe reliant les deux corps

$$\vec{r_{12}} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

équation dynamique du centre de masse

... insensible à la force d'interaction...

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 \\ M\ddot{\vec{r}}_G &= \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} \end{aligned}$$

...et les forces externes constituent une résultante agissant sur le centre de masse

explication

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}^{1\rightarrow 2} + \vec{F}^{2\rightarrow 1} + \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} \\ &= \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} \end{aligned}$$

... dans le nouveau repère ...

$$m_1 \ddot{\vec{r_1}} + m_2 \ddot{\vec{r_2}} = \vec{F_1^{ext}} + \vec{F_2^{ext}}$$
$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}}) = \vec{F^{1\to 2}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{F_2^{ext}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{F_1^{ext}}$$

définition

- masse totale: $M = m_1 + m_2$
- masse réduite: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

variables relatives et variables du centre de masse

$$\begin{aligned} \vec{r_G} &= \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} &= \vec{r_2} - \vec{r_1} \end{aligned}$$

équations du mouvement

$$\begin{aligned} M \ddot{\vec{r_G}} &= \vec{F_1^{\text{ext}}} + \vec{F_2^{\text{ext}}} \\ \mu \ddot{\vec{r}} &= \vec{F^{1\to 2}} + \frac{\mu}{m_2} \vec{F_2^{\text{ext}}} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F_1^{\text{ext}}} \end{aligned}$$

conclusion

Le problème est décomposé en un mouvement d'un point matériel où toute la masse $M = m_1 + m_2$ est concentrée et soumis à la résultante des forces externes, et en un point matériel de masse μ soumis à une force centrale correspondant à l'interaction des deux points matériels et des forces extérieures pondérées par la masse réduite divisée par la masse respective. Ainsi, lorsque la force extérieure est proportionnelle à la masse (force gravifique par exemple) alors les forces extérieures n'agissent pas sur le deuxième point matériel (de masse réduite μ).