XII. Kepler

Mouvement à force centrale, formule de Binet, coniques, lois de Kepler, mouvement à deux corps, mouvement à la surface de la terre

Ph. Müllhaupt

Programme — XII. Kepler

1. coniques
2. mouvement central
3. mouvement central en ρ^{-2}
4. problème à deux corps
5. dynamique terrestre

coniques

définition

Lieu des points P tels que le rapport des distances à un point fixe O (foyer) et à une droite fixée Δ (directrice) est constant. La valeur de ce rapport est appelé l'excentricité

$$e := \frac{\|\vec{PO}\|}{\|\vec{PQ}\|} = \frac{\rho}{d - \rho\cos\phi}$$

d est la distance entre la droite Δ et le foyer O

type de coniques

- $e = 0$: cercle
- $0 < e < 1$: ellipse
- $e = 1$: parabole
- $1 < e < \infty$: hyperbole
- $e = \infty$: droite

coniques (relations algébriques en coord. polaires ρ, ϕ)

distance entre le foyer et la directrice : d

$$p = ed$$

branche entourant le foyer

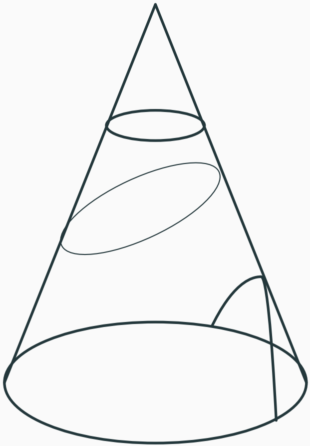
$$\frac{p}{\rho} = 1 + e\cos\phi$$

branche d'hyperbole qui n'entoure pas le foyer

$$\frac{p}{\rho} = -1 + e\cos\phi$$

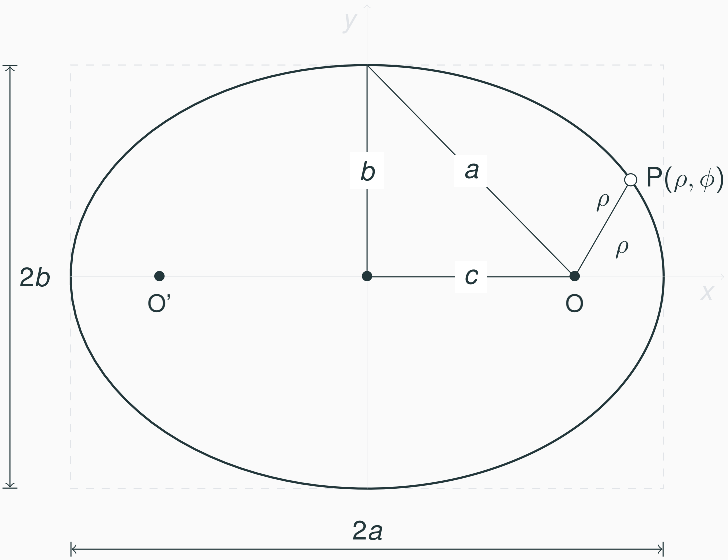
demi-grand axe a et demi-petit axe b

$$a = \frac{p}{|1-e^2|} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{|1-e^2|}}$$
$$p = \frac{b^2}{a} \qquad e^2 = 1 \pm \frac{b^2}{a^2}$$

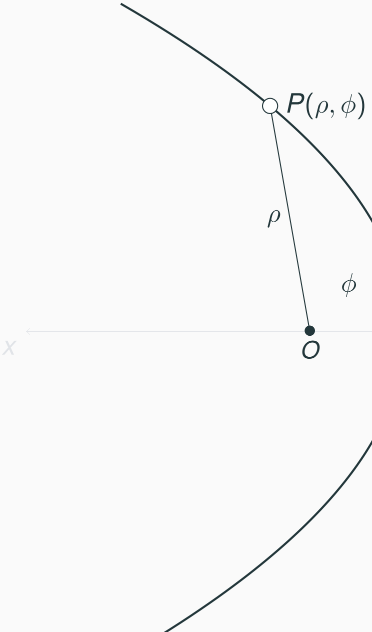


Les coniques correspondent à l'intersection d'un cône avec un plan.

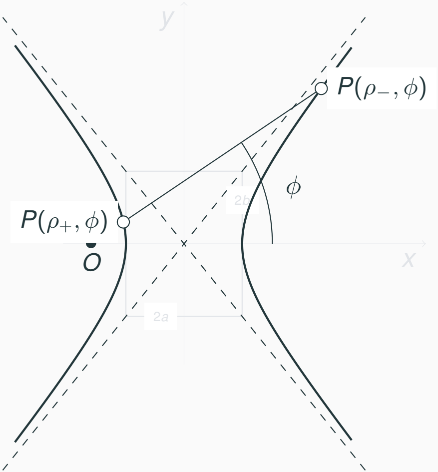
ellipse $0 < e < 1$



parabole $e = 1$



hyperbole $1 < e < +\infty$



mouvement central

mouvement central

définition

Le mouvement d'un point P est central de centre O si le support de l'accélération passe constamment par O

constante du mouvement (moment cinétique)

constante du mouvement

$$\text{mouvement central}$$
$$\Updownarrow$$
$$\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{r_0} \wedge \vec{v_0} \qquad \forall t$$

démonstration

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{a}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \text{ colinéaire à } \vec{a} \leftrightarrow \text{Force centrale}$$

moment cinétique

$$\vec{L_O} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \text{constant}$$

vitesse aréolaire

définition

ΔA_O est l'aire de la surface balayée par le rayon vecteur $\vec{r} = \vec{OP}$ pendant Δt

$$\dot{A}_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_O}{|\Delta t|}$$

... au passage à la limite...

...aire du triangle infinitésimal...

$$\dot{A}_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{|\Delta t|} \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge \vec{\Delta x}\| = \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge \vec{v}\|$$

constante des aires

théorème

$$\text{mouvement plan central} \\ \Updownarrow \\ \rho^2\dot{\phi} = C$$

démonstration

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = \rho\vec{e_\rho} \wedge (\dot{\rho}\vec{e_\rho} + r\dot{\phi}\vec{e_\phi}) = \rho^2\dot{\phi}(\vec{e_\rho} \wedge \vec{e_\phi})$$

théorème

Un mouvement plan est central de centre O si et seulement si le rayon vecteur balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux et le signe de $\dot{\phi}$ est constant. Si le mouvement est périodique de période T

$$\mid C \mid = 2\dot{A}_0 = \frac{2S}{T}$$

avec S la surface enfermée par la trajectoire.

démonstration

$$\Delta A_0 = \int_t^{t+\Delta t} \dot{A}_0 dt = \frac{1}{2} \mid C \mid \Delta t$$

la formule de Binet

$$a_\rho = -\frac{C^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right]$$

... s'obtient en utilisant la loi des aires $\rho^2\dot{\phi} = C$ et ...

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}\frac{d\rho}{d\phi} = \frac{C}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\phi} = -C\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{\rho}\right) \\
\ddot{\rho} &= \frac{d\dot{\rho}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\phi}\frac{C}{\rho^2} = -\frac{C^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)
\end{aligned}$$

... dans l'accélération radiale

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = \ddot{\rho} - \frac{C^2}{\rho^3}$$

mouvement central en ρ^{-2}

mouvement central en ρ^{-2}

$$\vec{a} = -\chi \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

force de gravité

$$\chi = GM$$

force électrostatique

$$\chi = -\frac{1}{m}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}qQ$$

trajectoire conique $\Rightarrow$ accélération en ρ^{-2}

théorème

Si la trajectoire d'un mouvement central de centre O est une conique dont O est le foyer, alors l'accélération est en ρ^{-2} :

$$\vec{a} = -\chi \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

avec χ déterminé par la constante des aires et les paramètres de la conique a et b

$$\mid \chi \mid = C^2 \frac{a}{b^2}$$

démonstration

En partant de l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires

$$\frac{p}{\rho} = 1 + e\cos\phi$$

... et en utilisant la formule de Binet ...

$$\begin{aligned} a_\rho &= -\frac{C^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right] \\ &= -\frac{C^2}{\rho^2}\left(-\frac{e}{p}\cos\phi + \frac{1 + e\cos\phi}{p}\right) \\ &= -\frac{C^2}{p}\frac{1}{\rho^2} \end{aligned}$$

trajectoire conique $\Rightarrow$ accélération en ρ^{-2}

... on constate dans le cas de l'ellipse ...

que l'accélération est en ρ^{-2}

$$\begin{aligned} a_\rho &= -\frac{\chi}{\rho^2} \\ \chi &= \frac{C^2}{p} = \frac{C^2 a}{b^2} > 0 \end{aligned}$$

... et dans le cas de l'hyperbole ...

$$\frac{p}{\rho} = -1 + e\cos\phi$$

et le signe de χ change

lemme

Soit $x \in \mathbb{R}$ un scalaire l'équation différentiellee

$$\ddot{x} = f(x)$$

alors

$$G(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int_0^x f(\xi) d\xi$$

est une constante du mouvement, c.-à-d. $\frac{dG}{dt} = 0$

démonstration

$$\frac{dG}{dt} = \dot{x}\ddot{x} - f(x)\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} - f(x)) = 0$$

constante du mouvement (énergie)

théorème

Si la trajectoire d'un mouvement central de centre O est une conique dont O est le foyer, alors la grandeur

$$G(\vec{r},\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{v}\bullet\vec{v} - \frac{\chi}{\|\vec{r}\|} =: K$$

est une constante du mouvement

... ce qui revient à dire que l'énergie

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\vec{v}\bullet\vec{v} - m\frac{\chi}{\|\vec{r}\|} = mK$$

... est alors une constante du mouvement

hyperbole ($K > 0$), parabole ($K = 0$), ellipse ($K < 0$)

constante du mouvement (énergie)

démonstration

$$\begin{aligned}
a_\rho &= \ddot{\rho} - \frac{C^2}{\rho^3} \\
\ddot{\rho} &= a_\rho + \frac{C^2}{\rho^3} \\
\ddot{\rho} &= -\frac{\chi}{\rho^2} + \frac{C^2}{\rho^3} =: f(\rho) \\
V(\rho) &= -\int_0^\rho -\frac{\chi}{\xi^2} + \frac{C^2}{\xi^3} d\xi \\
&= -\left(\chi\frac{1}{\xi} - \frac{C^2}{2}\frac{1}{\xi^2}\right)_0^\rho \\
&= -\frac{\chi}{\rho} + \frac{C^2}{2}\frac{1}{\rho^2}
\end{aligned}$$

constante du mouvement (énergie)

démonstration (suite)

$$\frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{C^2}{2\rho^2} - \frac{\chi}{\rho} = K$$

mais $C = \rho^2\dot{\phi}$ (loi des aires) et donc

$$\frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\rho^2\dot{\phi} - \frac{\chi}{\rho} = K$$

ainsi

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 \\ K &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{\chi}{\rho} \end{aligned}$$

et K est une constante du mouvement

période du mouvement

théorème

$$T = 2\pi\sqrt{a^3/\chi}$$

démonstration

Dans le cas de l'ellipse (courbe fermée)

$$\mid C \mid = 2\dot{A}_0 = \frac{2S}{T}$$

et la surface est donnée par

$$S = \pi ab$$

et

$$\mid \chi \mid = C^2 \frac{a}{b^2}$$

démonstration (suite)

$$
\begin{aligned}
\mid C \mid^2 &= \left(\frac{2\pi ab}{T}\right)^2 = \chi \frac{b^2}{a} \\
T^2 &= \frac{(2\pi)^2}{\chi} a^3
\end{aligned}
$$

conclusion

$$T = 2\pi\sqrt{a^3/\chi}$$

réciproque

théorème

Si l'évolution d'un point est telle que

$$\vec{a} = -\chi \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

où χ est une constante, alors le mouvement est central de centre O, et la trajectoire est une conique dont O est le centre

réciproque

démonstration

$$
\begin{aligned}
a_\rho &= -\frac{\chi}{\rho^2} && \text{(hypothèse)} \\
a_\rho &= -\frac{C^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right] && \text{(Binet)} \\
\frac{\chi}{C^2} - \frac{1}{\rho} &= \frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

... mais on peut ajouter une constante sous la dérivée

$$\frac{\chi}{C^2} - \frac{1}{\rho} = \frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\chi}{C^2}\right)$$

... avec $x = \frac{1}{\rho} - \frac{\chi}{C^2}$, on a un oscillateur harmonique ...

réciproque

démonstration (suite)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\phi^2} &= -x \qquad\qquad \text{(oscillateur harmonique)} \\ x(\phi) &= A\cos(\phi) + B\sin(\phi) \end{aligned}$$

... on peut choisir l'axe polaire afin que $B = 0$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\lambda}{C^2} + A\cos\phi$$

... et on a bien une équation d'une conique avec

$$p = \frac{C^2}{\mid \lambda \mid} \qquad\qquad e = \frac{\mid A \mid C^2}{\mid \lambda \mid}$$

... les conditions intiales déterminent A et donc l'excentricité e

problème à deux corps

problèmes à deux corps

deux corps interagissent

équations du mouvement

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\vec{F}^{1\to 2} \\
m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}^{1\to 2}
\end{aligned}
$$

problèmes à deux corps

... modification...

$$m_1 \ddot{\vec{r_1}} + m_2 \ddot{\vec{r_2}} = \vec{0}$$

$$\ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F_{1 \to 2}}$$

définition

- masse totale : $M = m_1 + m_2$
- masse réduite : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

problème à deux corps

variables relatives et variables du centre de masse

$$
\begin{aligned}
\vec{r_G} &= \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2} \\
\vec{r} &= \vec{r_2} - \vec{r_1}
\end{aligned}
$$

équations du mouvement

$$
\begin{aligned}
M\ddot{\vec{r_G}} &= 0 \\
\mu\ddot{\vec{r}} &= \vec{F^{1\to 2}} \qquad \vec{F^{1\to 2}} = F(\|\vec{r}\|)\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}
\end{aligned}
$$

conclusion

Le problème est décomposé en un point matériel en translation uniforme de masse $M = m_1 + m_2$ et un point matériel de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ soumis à une force centrale

constantes du mouvement

énergie cinétique

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_1 \vec{v_1} \bullet \vec{v_1} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v_2} \bullet \vec{v_2} \\
&= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v_G} - \frac{m_2}{M} \vec{v}) \bullet (\vec{v_G} - \frac{m_2}{M} \vec{v}) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v_G} + \frac{m_1}{M} \vec{v}) \bullet (\vec{v_G} + \frac{m_1}{M} \vec{v}) \\
&= \frac{1}{2} M \vec{v_G} \bullet \vec{v_G} + \frac{1}{2} \mu \vec{v} \bullet \vec{v}
\end{aligned}
$$

énergie

$$E = T + V = T + V(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|) = T_G + (T_r + V(r)) = E_G + E_r$$

constantes du mouvement

moment cinétique

$$
\begin{aligned}
\vec{L_O} &= \vec{r_1} \wedge m_1 \vec{v_1} + \vec{r_2} \wedge m_2 \vec{v_2} \\
&= \left(\vec{r_G} - \frac{m_2}{M}\vec{x}\right) \wedge m_1 \left(\vec{v_G} - \frac{m_2}{M}\vec{v}\right) \\
&\quad + \left(\vec{r_G} + \frac{m_1}{M}\vec{x}\right) \wedge m_2 \left(\vec{v_G} + \frac{m_1}{M}\vec{v}\right) \\
&= \vec{r_G} \wedge M\vec{v_G} + \vec{r} \wedge \mu\vec{v}
\end{aligned}
$$

dynamique terrestre

rappel (accélérations relatives et absolues, ici $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$)

$$\vec{a}_a(P) = \vec{a}_a(A) + \vec{a}_r(P) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AP}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP}$$

dynamique terrestre

comme $\dot{\omega} = 0$...

$$m[\vec{a_r}(P) + \vec{a_a}(A) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}] = m\vec{g} + \vec{F}$$

comme A suit un mouvement circulaire uniforme...

$$\vec{a_a}(A) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OA})$$

et par conséquent

$$m\vec{a_r}(P) = m\vec{g} + \vec{F} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{OA} + \vec{AP})) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}(P)$$

$$m\vec{a_r}(P) = m\vec{g} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) + \vec{F} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}(P)$$

correction de la gravité par $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP})$

$$\vec{a_r}(P) = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}(P)$$

accélération de Coriolis

$$2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}(P)$$

accélération relative (absence de force, $\vec{F} = 0$)

$$\vec{a}_r(P) = \vec{g} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(P)$$

repère lié à la Terre

Repère $(A, y_1, y_2, y_3) = (A, x, y, z)$, A est la position fixée sur le sol

- x pointe vers le Sud
- y pointe vers l'Est
- z pointe vers le Cosmos

mouvement à la surface de la Terre

équations du mouvement

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega\cos\phi \\ 0 \\ \omega\sin\phi \end{pmatrix} \qquad \vec{v_r}(P) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}(P) = 2 \begin{vmatrix} \vec{\hat{x}} & -\omega\cos\phi & \dot{x} \\ \vec{\hat{y}} & 0 & \dot{y} \\ \vec{\hat{z}} & \omega\sin\phi & \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2\dot{y}\omega\sin\phi \\ 2\dot{x}\omega\sin\phi + 2\dot{z}\omega\cos\phi \\ -2\omega\cos\phi\dot{y} \end{pmatrix}$$

équations du mouvement

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\,\dot{y}\omega \sin\phi \\
\ddot{y} &= -2\,\dot{z}\omega\cos\phi - 2\,\dot{x}\omega\sin\phi \\
\ddot{z} &= 2\,\omega\cos\phi\,\dot{y} - g
\end{aligned}
$$

approximation lorsque z constant ($\dot{z} = 0$)

Le pendule est supposé suffisament long et lécart petit par rapport à la verticale.

intégration successive en retenant que le premier ordre...

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= +2\omega\dot{y}\sin\phi \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x}\sin\phi\end{aligned}$$

... une première intégration découplée...

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 2\omega\sin\phi\, y(t) + \dot{x}(0) \\ \dot{y}(t) &= -2\omega\sin\phi\, x(t) + \dot{y}(0)\end{aligned}$$

... deuxième intégration découplée avec $x(t) = \dot{x}(0)t$ et $y(t) = \dot{y}(0)t$...

$$\begin{aligned}x(t) &= \omega\sin\phi\,\dot{y}(0)t^2 + \dot{x}(0)t + x(0) \\ y(t) &= -\omega\sin\phi\,\dot{x}(0)t^2 + \dot{y}(0)t + y(0)\end{aligned}$$

s est la déflection par rapport au mouvement rectiligne

$$s := \sqrt{(x - \dot{x}(0)t)^2 + (y - \dot{y}(0)t)^2} = \omega \sin \phi v_0 t^2$$

avec $v_0 = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2}$

pendule de Foucault

en partant de la formule

$$s = \omega \sin \phi v_0 t^2$$

... la déviation angulaire $\Delta\phi$ vaut

$$\Delta\phi = \frac{s}{v_0 t} = \omega t \sin \phi$$

après 10 minutes, on trouve une déviation en degrés de ...

$$\Delta\phi = \sin\phi \cdot 7 \times 10^{-5} \times 10 \times 60 = \sin\phi \cdot 0.042 \text{ [rad]} = \sin\phi \cdot 2.4 \text{ [degrés]}$$