X. Lagrange II

Force de liaison parfaite, déplacement virtuel, principe de d'Alembert, équations de Lagrange à partir de Newton en utilisant le principe de d'Alembert, exemples du pendule simple et de la glissière hémisphérique

Ph. Müllhaupt

Programme — XI. Lagrange II

1. contraintes (liaisons) parfaites
2. principe de d'Alembert
   - déplacement virtuel
   - travail virtuel
3. exemple du pendule simple
   - déduction de l'équation différentielle du pendule
   - équations de Lagrange
   - expression du travail virtuel des forces cinétiques
4. exemple : glissière hémisphérique

contraintes (liaisons) parfaites

contraine (liaison) parfaite

définition de la liaison parfaite

C'est une contrainte entre les coordonnées telle que les forces nécessaires pour les faire respecter n'effectue aucune travail lors d'un déplacement compatible avec la contrainte.

exemples de contraintes parfaites

fil

surface plane ($O \in$ surface)

glissière en rotation uniforme

bille sur sphère

expression mathématique d'une laison parfaite

expression de la contrainte (liaison) parfaite : $C(x, y, z, t) = 0$

$O \in$surface plane	$c_1\, x + c_2\, y + c_3 z = 0$ avec $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$
bille sur sphère	$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$
pendule simple	$x^2 + y^2 - L^2 = 0$
glissière hémisphérique	$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ et $\frac{x}{\cos(\Omega t)} = \frac{y}{\sin(\Omega t)}$

principe de d’Alembert

déplacement virtuel

La contrainte parfaite est fixée dans le temps. Ainsi $C(x, y, z, t) = 0$ où t n'est plus considéré comme variable.

définition

Un déplacement virtuel infinitésimal est noté $\delta\vec{r} = \delta x\,\hat{x} + \delta y\,\hat{y} + \delta z\,\hat{z}$ Il est tel que

$$\frac{\partial C}{\partial x}\delta x + \frac{\partial C}{\partial y}\delta y + \frac{\partial C}{\partial z}\delta z = 0$$

exemple de liaison parfaite : la glissière hémisphérique

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \\ x \sin(\Omega t) - y \cos(\Omega t) &= 0 \end{aligned}$$

on a 1 degré de liberté car 3 coordonnées x, y et z et 2 contraintes.

$$\begin{aligned} 2x\,\delta x + 2y\,\delta y + 2z\,\delta z &= 0 \\ \delta x \sin(\Omega t) - \delta y \cos(\Omega t) &= 0 \end{aligned}$$

le temps est figé et tout déplacement infinitésimal tel que δx, δy et δz satisfaisant ces deux équations est un déplacement virtuel.

travail virtuel

définition

C'est le travail effectué par une force quelconque lors d'un déplacement virtuel

$$\delta W = \vec{F} \bullet \delta \vec{r}$$

principe de d'Alembert

Une force responsable du maintien de d'une contrainte parfaite n'effectue aucun travail virtuel.

exemple : glissière

$$\begin{aligned} \vec{T} &= T_x\,\hat{x} + T_y\,\hat{y} + T_z\,\hat{z} \\ \vec{T} \bullet \delta\vec{r} &= 0 \end{aligned}$$

$$T_x\delta x + T_y\delta y + T_z\delta z = 0$$

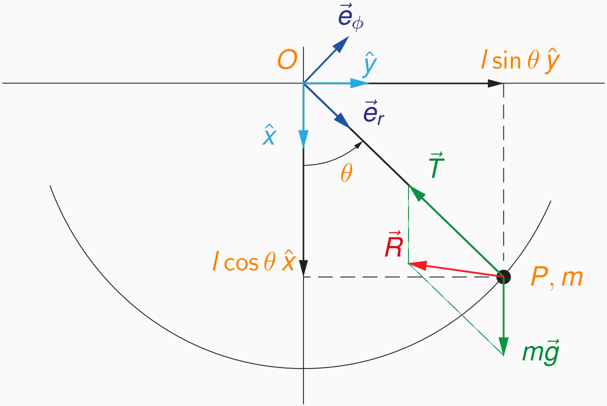
pour tout δx, δy, δz qui satisfont à

$$x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z = 0$$

$$\sin(\Omega\,t)\,\delta x - \cos(\Omega\,t)\,\delta y = 0$$

exemple du pendule simple

Le pendule simple



Le pendule simple revisité

équations dynamiques

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg + T_x \\ m\ddot{y} &= T_y \end{aligned}$$

remarque

L'hypothèse que la force de liaison (réaction de la tige) est alignée avec la tige n'est pas nécessaire avec la méthode proposée. Ainsi, aucune structure apparente concernant les forces de réactions T_x et T_y n'est assumée

Le pendule simple revisité

liaison

Les coordonnées x et y sont liées par le fait que le point matériel est contraint de se déplacer sur un cercle

$$x^2 + y^2 = l^2$$

coordonnée généralisée

On a 2 coordonnées cartésiennes x et y et une liaison indépendante $x^2 + y^2 = l^2$. On peut alors choisir une seule coordonnée généralisée θ

expressions des coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} x &= l\cos\theta \\ y &= l\sin\theta \end{aligned}$$

déplacement virtuel

C'est un déplacement infinitésimal δx, δy des coordonnées x et y compatible avec la contrainte $x^2 + y^2 = l^2$. Dans notre cas, la contrainte ne dépend pas du temps. Il n'est pas nécessaire de la figer dans le temps. Le déplacement virtuel δx, δy doit ainsi satisfaire

$$x\delta x + y\delta y = 0$$

expression du déplacement virtuel en fonction de θ et $\delta\theta$

$$\begin{aligned} \delta x &= -l \sin\theta\delta\theta \\ \delta y &= l \cos\theta\delta\theta \end{aligned}$$

le principe de d'Alembert

Les liaisons dites parfaites sont celles qui engendrent des forces qui ne travaillent pas lors d'un déplacement virtuel. Le principe stipule ainsi que pour un acroissement virtuel compatible avec les contraintes, le travail de ces forces est nul. Dans le cas du pendule simple, cela implique

$$T_x \delta x + T_y \delta y = 0$$

le pendule simple revisité

travaux virtuels de toutes les forces

travail f. inertielles = travail f. gravifique + travail f. réaction de liaison

$$m\ddot{x}\delta x + m\ddot{y}\delta y = mg\delta x + T_x\delta x + T_y\delta y$$

travaux virtuels après application du principe de d'Alembert

$$m\ddot{x}\delta x + m\ddot{y}\delta y = mg\delta x$$

dérivées des coordonnées cartésiennes

$$
\begin{aligned}
x &= l\cos\theta \\
y &= l\sin\theta \\
\dot{x} &= -l\sin\theta\dot{\theta} \\
\dot{y} &= l\cos\theta\dot{\theta} \\
\ddot{x} &= -l\cos\theta\dot{\theta}^2 - l\sin\theta\ddot{\theta} \\
\ddot{y} &= -l\sin\theta\dot{\theta}^2 - l\cos\theta\ddot{\theta}
\end{aligned}
$$

le pendule simple revisité

travaux virtuels en fonction de θ et $\delta\theta$

$$m\ddot{x}\delta x +$$
$$m\ddot{y}\delta y = mg\delta x$$

$$m(-l\sin\theta\ddot{\theta} - l\cos\theta\dot{\theta}^2)(-l\sin\theta)\delta\theta +$$
$$m(l\cos\theta\ddot{\theta} - l\sin\theta\dot{\theta}^2)(l\cos\theta)\delta\theta = -mgl\sin\theta\delta\theta$$

$$(ml^2\sin^2\theta\ddot{\theta} + ml^2\cos^2\theta\ddot{\theta})\delta\theta = -mgl\sin\theta\delta\theta$$

$$ml^2\ddot{\theta}\delta\theta = -mgl\sin\theta\delta\theta$$

déduction de l'équation du pendule

Soit

$$ml^2\ddot{\theta}\delta\theta = -mgl\sin\theta\delta\theta$$

le bilan des travaux virtuels.
Comme l'acroissement $\delta\theta$ est toujours compatible avec la contrainte du cercle, on peut choisir $\delta\theta$ complètement librement ainsi

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin\theta$$

doit être satisfait quel que soit $\delta\theta$, ce qui fourni l'équation bien familière d'un pendule

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

plan pour la déduction des équations de Lagrange

- le travail virtuel est évalué (forces inertielles et potentielles)
- grâce au principe de d'Alembert, le travail virtuel de la force de réaction ne contribue pas
- on applique la règle de Leibniz (dans le sens inverse) afin de faire apparaître l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$

  à partir du travail virtuel des forces cinétiques

- le travail virtuel des forces potentielles est intégré pour obtenir l'énergie potentielle

$$V = mgl\cos\theta + \mathrm{Cte}$$

plan pour la déduction des équations de Lagrange (suite)

- comme il n'y a pas de frottement et pas de force non conservative, il n'est pas nécessaire de déterminer la force généralisée Q_θ
- Le Lagrangien est constitué $\mathcal{L} = T - V$
- Les équations de Lagrange sont obtenues en récapitulant les étapes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

travail virtuel des forces cinétiques

$$m\ddot{x}\,\delta x + m\ddot{y}\,\delta y \quad = \quad m\ddot{x}(-l\sin\theta)\delta\theta + m\ddot{y}(l\cos\theta)\delta\theta$$

concentrons-nous sur le terme en bleu et appliquons la règle de Leibniz (dans le sens contraire)

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}(-l\sin\theta) &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}(-l\sin\theta)\right) - m\dot{x}(-l\cos\theta\dot{\theta}) \\
&= \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{\theta}}\right) - m\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\theta} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)
\end{aligned}$$

le pendule simple revisité

travail virtuel des forces cinétiques

$$m\ddot{x}\,\delta x + m\ddot{y}\,\delta y \quad = \quad m\ddot{x}(-l\sin\theta)\delta\theta + m\ddot{y}(l\cos\theta)\delta\theta$$

concentrons-nous sur le terme en rouge et appliquons la règle de Leibniz (dans le sens contraire)

$$\begin{aligned}
m\ddot{y}(l\cos\theta) &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{y}(l\cos\theta)\right) - m\dot{y}(-l\sin\theta)\dot{\theta} \\
&= \frac{d}{dt}\left(m\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}}\right) - m\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\theta} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right)
\end{aligned}$$

... faisons apparaître l'énergie cinétique ...

$$
\begin{aligned}
m\,\ddot{x}\,\delta x + m\,\ddot{y}\,\delta y &= \left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)\right]\delta\theta \\
&\quad + \left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right)\right]\delta\theta \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2)\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2)\right)\right] \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta}\right]\delta\theta
\end{aligned}
$$

travail virtuel de la force potentielle

$$mg\,\delta x = -mgl\sin\theta\,\delta\theta$$

intégration pour obtenir le potentiel

Comme $-mgl\sin\theta$ est une fonction qui s'intègre, on peut définir le potentiel

$$V = -mgl\cos\theta + \mathrm{Cte}$$

de telle sorte que le travail virtuel de la force gravifique s'écrive

$$mg\delta x = -\frac{\partial V}{\partial\theta}\delta\theta$$

le pendule simple revisité

comme $m\ddot{x}\delta x + m\ddot{y}\delta y = mg\delta x$**, pour tout** $\delta\theta$**...**

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta}\right]\delta\theta = -\frac{\partial V}{\partial\theta}\delta\theta \qquad \forall\delta\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} = -\frac{\partial V}{\partial\theta}$$

définition du Lagrangien

$$\mathcal{L} := T - V$$

équation de Lagrange (cas conservatif)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

exemple : glissière hémisphérique

exemple : glissière hémisphérique

sphérique 1

$$\begin{aligned} x &= r\,\sin\theta\,\cos\phi \\ y &= r\,\sin\theta\,\cos\phi \\ z &= r\,\cos\theta \end{aligned}$$

sphérique 2

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\theta\,\cos\phi \\ y &= r\,\cos\theta\,\sin\phi \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$

avec les coordonnées sphérique 1

$$
\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\phi}^2\,\sin^2\theta = -r\dot{\theta}^2 - r\,\Omega^2\,\sin^2\theta \\
a_\theta &= r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\,\cos\theta\,\sin\theta = r\,\ddot{\theta} - r\,\Omega^2\,\cos\theta\,\sin\theta \\
a_\phi &= r\,\ddot{\phi}\sin\theta + 2\,r\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\,\sin\theta = 2\,r\,\Omega\,\dot{\theta}\,\cos\theta
\end{aligned}
$$

car

$$
\dot{\phi} = \Omega \qquad \ddot{\phi} = 0 \qquad \dot{r} = 0
$$

Equations dynamiques :

$$
\begin{aligned}
m\,a_r &= T_r - mg\,\cos\theta \\
m\,a_\theta &= T_\theta + mg\,\sin\theta \\
m\,a_\phi &= T_\phi
\end{aligned}
$$

déplacement virtuel

$$\begin{aligned} \delta\phi &= 0 \\ \delta r &= 0 \end{aligned}$$

et $\delta\theta$ est quelconque

principe de d'Alembert

$$T_r\,\delta r + T_\theta\, r\,\delta\theta + T_\phi\, r\sin\theta\,\delta\phi = 0$$

mais comme $\delta r = 0$ et $\delta\phi = 0$ on a $r\,T_\theta\,\delta\theta = 0$ quel que soit $\delta\theta \neq 0$. Ainsi

$$(m\,a_\theta - mg\sin\theta)\delta\theta = 0 \qquad\qquad \forall\delta\theta \neq 0$$

ce qui entraîne

$$a_\theta - g\sin\theta = 0$$

et donc l'équation dynamique

$$\boxed{r\,\ddot{\theta} - r\,\Omega^2\,\cos\theta\,\sin\theta - g\,\sin\theta = 0}$$