X. Lagrange I

L’énergie cinétique et l’énergie potentielle, le lagrangien, coordonnées généralisées, équation de Lagrange à partir de celles de Newton en absence de contrainte

Ph. Müllhaupt

Programme — X. Lagrange I

1. un point matériel soumis à une force issue d'un potentiel
2. utilisation de l'énergie cinétique
3. formalisme de Lagrange
4. coordonnées généralisées
5. formules pour l'énergie cinétique
6. marche à suivre

un point matériel soumis à une force issue d’un potentiel

point matériel unique

... soumis à une force issue d'un potentiel

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ m\ddot{x}_2 &= F_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \\ m\ddot{x}_3 &= F_3 = -\frac{\partial V}{\partial x_3} \end{aligned}$$

idée

... faisons apparaître l'énergie cinétique ...

point matériel unique

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_1) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(1/2m\dot{x}_1^2)}{\partial\dot{x}_1}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(1/2m\dot{x}_2^2)}{\partial\dot{x}_2}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_3) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(1/2m\dot{x}_3^2)}{\partial\dot{x}_3}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_3}$$

utilisation de l’énergie cinétique

point matériel et force issue d'un potentiel

énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

équations du mouvement pour un seul point matériel

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

formalisme de Lagrange

formalisme général (> 1 point matériel + > 1 corps solide)

le lagrangien

$$\mathcal{L} = T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) - V(q_1, \ldots, q_n)$$

équations du mouvement (cas conservatif)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n}$$

coordonnées généralisées

coordonnées généralisées $q_1, \ldots, q_n$

identifier les contraintes

Ce sont les relations (liaisons) entre les coordonnées cartésiennes libres

degrés de liberté n

C'est la différence entre le nombre de coordonnées cartésiennes libres et le nombre de contraintes indépendantes

coordonnées généralisées

Ce sont des coordonnées libres (non nécessairement cartésiennes) en nombre égal au degré de liberté. Elles ne sont pas nécessairement uniques

formules pour l’énergie cinétique

Energie cinétique

Point matériel

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2$$

Corps solide (tenseur d'inertie au centre de masse G)

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v_G} \bullet \vec{v_G} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \bullet \vec{I_G} \vec{\omega}$$

Corps solide (tenseur d'inertie en un point A quelconque du solide)

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v_A} \bullet \vec{v_A} + M \vec{v_A} \bullet (\vec{\omega} \wedge \vec{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \bullet \vec{I_A} \vec{\omega}$$

énergie cinétique au centre de gravité G

démonstration de la formule

$$T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v_\alpha} \bullet \vec{v_\alpha} \qquad \vec{v_\alpha} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}_\alpha$$

$$\begin{aligned}
T &= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{v_A} + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}_\alpha) \bullet (\vec{v_A} + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}_\alpha) \\
&= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v_A} \bullet \vec{v_A} - \sum_\alpha m_\alpha (\vec{AP}_\alpha \wedge \vec{\omega}) \bullet \vec{v_A} \\
&\quad + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{AP}_\alpha \wedge \vec{\omega}) \bullet (\vec{AP}_\alpha \wedge \vec{\omega}) \\
&= \frac{1}{2} M \vec{v_A} \bullet \vec{v_A} - \sum_\alpha m_\alpha ((\vec{AG} + \vec{GP}_\alpha) \wedge \omega) \bullet \vec{v_A} \\
&\quad + \sum_\alpha m_\alpha \frac{1}{2} (\vec{AP}_\alpha \wedge \vec{\omega}) \bullet (\vec{AP}_\alpha \wedge \omega) \\
&= \frac{1}{2} M \vec{v_A} \bullet \vec{v_A} - M(\vec{AG} \wedge \omega) \bullet \vec{v_A} + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\vec{AP}_\alpha \wedge \vec{\omega}) \bullet (\vec{AP}_\alpha \wedge \omega)
\end{aligned}$$

concentrons nous sur le dernier terme...

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha (A\vec{P}_\alpha \wedge \vec{\omega}) \bullet (A\vec{P}_\alpha \wedge \vec{\omega}) &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \vec{\omega}^T \left[A\vec{P}_\alpha \wedge\right]^T \left[A\vec{P}_\alpha \wedge \vec{\omega}\right] \\
\left[A\vec{P}_\alpha \wedge\right] &= \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \\
\left[A\vec{P}_\alpha \wedge\right]^T \left[A\vec{P}_\alpha \wedge\right] &= \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ainsi ...

$$I_A = \sum_\alpha m_\alpha \left[\vec{AP}_\alpha \wedge\right]^T \left[\vec{AP}_\alpha \wedge\right] = \sum_\alpha m_\alpha \begin{bmatrix} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \vec{v_A} \bullet \vec{v_A} + M \vec{v_A} \bullet (\vec{\omega} \wedge \vec{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \bullet (I_A \vec{\omega})}$$

marche à suivre

marche à suivre

1. Identifier les liaisons (contraintes). Vérifier que ces liaisons sont soit purement entre des coordonnées sans leurs dérivées temporelles ou alors que la contrainte puisse s'intégrer (contrainte holonôme)
2. Trouver le degré de liberté n comme la différence entre toutes les coordonnées et le nombre de contraintes indépendantes
3. Choisir un ensemble de coordonnées généralisées (en nombre égal au degré de liberté)
4. Pour chaque point matériel, écrire son énergie cinétique en fonction des coordonnées généralisées et de leurs dérivées temporelles
5. Identifier tous les corps solides et exprimer l'énergie cinétique de chacun d'entre eux

Marche à suivre

6. Constituer l'énergie cinétique complète

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

7. Identifier toutes les forces provenant des potentiels et constituer ainsi un potentiel unique fonction des coordonnées généralisées

$$V(q_1, \dots, q_n)$$

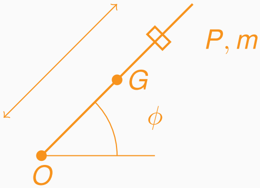
8. Constituer le Lagrangien

$$L = T - V$$

9. Ecrire les équations différentielles du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

exemple



- barre avec un axe de rotation en O
- centre de masse G au milieu de la barre
- longueur de la barre L
- angle ϕ
- anneau coulissant en P de masse m
- position radiale de l'anneau r

énergie cinétique et potentielle

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} M \vec{v_G} \bullet \vec{v_G} + \frac{1}{2} I_G \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \vec{v_P} \bullet \vec{v_P} \\
V &= mg\, y_P + M\, g\, y_G = m\, g\, r\, \sin\phi + M\, g\, \frac{L}{2} \sin\phi \\
\vec{OP} &= r\cos\phi\,\hat{x} + r\sin\phi\,\hat{y} \\
\vec{OG} &= \frac{L}{2}\cos\phi + \frac{L}{2}\sin\phi
\end{aligned}
$$

cinématique et énergie cinétique, coord. classique + Leibniz

$$
\begin{aligned}
\vec{v_P} &= (\dot{r}\cos\phi - r\sin\phi\dot{\phi})\,\hat{x} + (\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi)\hat{y} \\
\vec{v_G} &= -\frac{L}{2}\dot{\phi}\sin\phi\,\hat{x} + \frac{L}{2}\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{y} \\
\vec{v_P} \bullet \vec{v_P} &= \dot{r}^2\cos^2\phi - 2r\dot{r}\cos\phi\,\sin\phi\,\dot{\phi} + r^2\sin^2\phi\,\dot{\phi}^2 \\
&\quad + \dot{r}^2\sin^2\phi + 2r\dot{r}\,\sin\phi\,\cos\phi\,\dot{\phi} + r^2\dot{\phi}^2\,\cos^2\phi \\
&= \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2
\end{aligned}
$$

cinématique et énergie cinétique, coord. polaires

$$\begin{aligned}
\vec{OP} &= r\,\vec{e_\rho} \\
\dot{\vec{OP}} &= \dot{r}\,\vec{e_\rho} + r\,\dot{\vec{e_\rho}} \\
\dot{\vec{e_\rho}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{e_\rho} = \dot{\phi}\,\vec{e_z} \wedge \vec{e_\rho} = \dot{\phi}\,\vec{e_\phi} \\
\dot{\vec{OP}} &= \dot{r}\vec{e_\rho} + r\dot{\phi}\,\vec{e_\phi} \\
\vec{v_P} \bullet \vec{v_P} &= \dot{\vec{OP}} \bullet \dot{\vec{OP}} = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v_G} \bullet \vec{v_G} &= \frac{L^2}{4}\,\dot{\phi}^2 \\
T &= \frac{1}{2}M\,\frac{L^2}{4}\,\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_G\,\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\,\dot{\phi}^2 \\
&= \frac{1}{2}I_O\,\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\,\dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

énergie potentielle et lagrangien

$$
\begin{aligned}
V &= m\,g\,r\,\sin\phi + M\,g\,\frac{L}{2}\,\sin\phi \\
\mathcal{L} &= T - V = \frac{1}{2} I_O \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 - mgr\,\sin\phi - Mg\frac{L}{2}\,\sin\phi
\end{aligned}
$$

équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= I_O\,\dot{\phi} + mr^2\,\dot{\phi} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -m\,g\,r\,\cos\phi - M\,g\,\frac{L}{2}\,\cos\phi \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= I_O\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\,r\,\dot{\phi} + mr^2\,\ddot{\phi} \\
&\quad + m\,g\,r\,\cos\phi + M\,g\,\frac{L}{2}\,\cos\phi = 0
\end{aligned}$$

équations de Lagrange

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= m\, r\, \dot{\phi}^2 - m\, g\, \sin\phi \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= m\, \ddot{r} - m\, r \dot{\phi}^2 + m\, g\, \sin\phi = 0
\end{aligned}
$$

inerties

$$
\begin{aligned}
I_G &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2\, dm = \frac{M}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2\, dr = \frac{M}{L}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{L} 2 \frac{L^3}{3\cdot 8} = \frac{1}{12} ML^2 \\
I_O &= \int_{O}^{L} r^2\, dm = \frac{M}{L}\int_{0}^{L} r^2\, dr = \left[\frac{M}{L}\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3} ML^2
\end{aligned}
$$