Exercice

Cinématique d'un disque inscrit dans un cercle (spirographe)

Enoncé

Un disque de rayon r se déplace de telle sorte à être en permanence inscrit dans un cercle de rayon R. Le disque touche le cercle au point B. Le cas de $R = 2r$ est considéré. On considère deux points en particulier, le centre du disque P et un point arbitraire du disque A. Un repère immobile $(O, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ est fixé au centre du cercle O. On introduit également deux angles pour repérer le disque, l'angle α que forme le vecteur $\mathbf{OP}$ avec le vecteur $\hat{\mathbf{x}}$ du repère et l'angle β du disque (par rapport à la droite OP).

1. Décrire la position du vecteur $\mathbf{OA}$ en fonction des deux angles α et β. A cette fin, introduire le paramètre $l = \|\mathbf{AP}\|$.
2. Déterminer la relation entre les vitesses angulaires $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ pour que le disque ne glisse pas au point de contact avec le cercle.
3. En utilisant la condition du point 2., déterminer la trajectoire que décrit A lorsque $\dot{\alpha}$ est constant.
4. Que se passe-t-il lorsque $l = r$, c.-à-d. lorsque le point A est situé sur la périphérie du disque ?

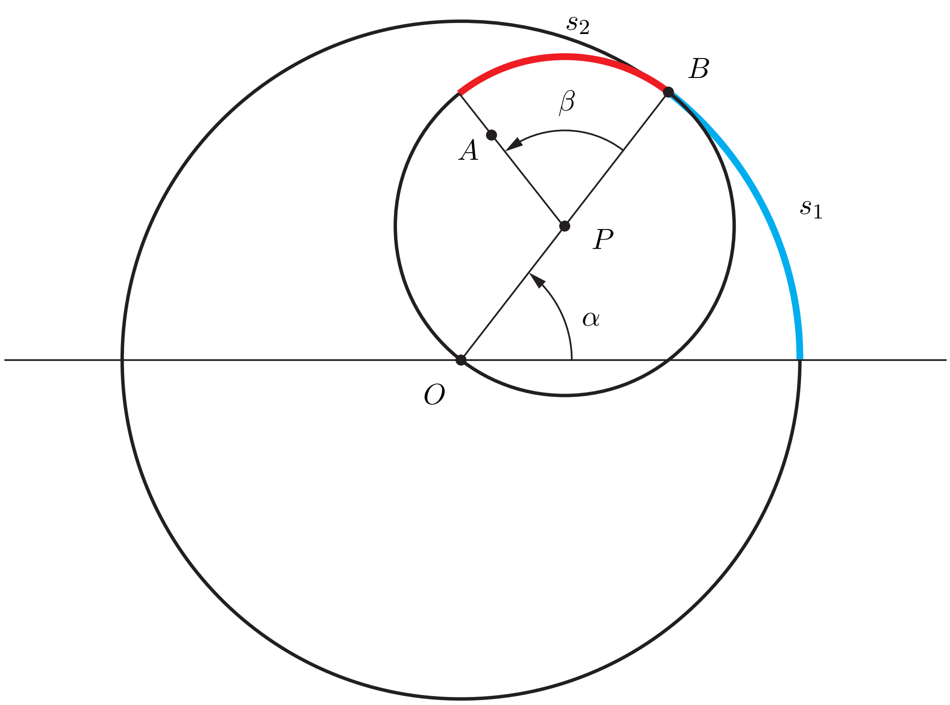

FIGURE 1: Un disque se déplace de telle sorte à toujours être en contact avec un cercle. L'angle α décrit le point de contact et l'angle β donne l'angle de repérage d'un point A par rapport à la droite reliant l'origine O au point de contact B. Le centre du disque est au point P.