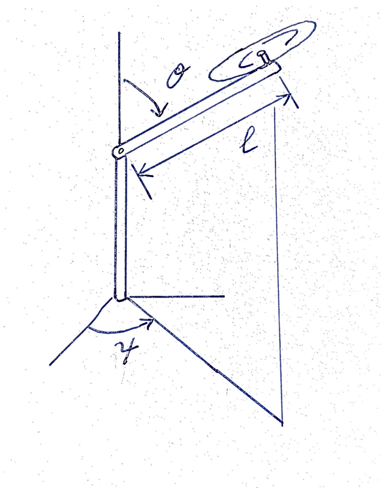
10 décembre 2024

Exemple

Illustration du calcul des forces généralisées



Un dispositif est constitué de deux barres. Le tout reste en contact permanent avec le sol (le système ne vol donc pas). La première barre tourne autour de l'axe vertical et la seconde est reliée à la première par une articulation de rotation. Le système possède ainsi deux degrés de liberté. Les angles θ et ψ sont choisis comme coordonnées généralisées.
On considère la force d'une hélice qui tourne rapidement sur elle-même : Une force de traction dans l'axe de l'hélice est produite qui tire l'hélice et son support en avant et cet effet est proportionnel au au carré de la vitesse de rotation de l'hélice. Il existe toutefois un effet supplémentaire, de faible ampleur mais non négligeable : L'hélice induit un mouvement latéral de l'axe de l'hélice. Cette force est également proportionnelle au carré de la vitesse. Ces deux forces aérodynamiques changent de sens lorsque l'hélice change de direction de rotation. Nous avons ainsi comme modèle de force aérodynamique $C_m \, \omega \, |\omega|)$ et pour le couplage aérodynamique $C_{m1} \, \omega \, |\omega|$. Il s'agit maintenant d'examiner comment ces modèles de forces interviennent précisément dans les forces généralisées lorsque l'hélice actionne un système mécanique ayant des couplages.
La première barre peut tourner autour de l'axe vertical selon l'angle ψ (axe de la barre). Cette barre de longueur l supporte une deuxième barre qui peut tourner à l'extrémité de la première barre. Elle est équipée d'une hélice qui engendre la force nécessaire pour que la barre puisse se déplacer selon l'angle θ qu'elle fait avec la première barre. On supposera également que les deux barres sont soumises à des frottements visqueux proportionnels à la vitesse angulaire respective (moment de force proportionnel à la vitesse angulaire). On demande d'évaluer les deux forces généralisées F_θ et F_ψ.
La méthode générale pour évaluer les forces généralisées est la suivante :

1. On modifie une coordonnée généralisée à la fois en faisant un déplacement infinitésimal δq_i.
2. On évalue le travail δW_i effectué lors de ce déplacement. Le travail virtuel total non nul des forces non conservatives est ainsi
$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta q_i$$
3. Le travail effectué δW_i est alors factorisé sous la forme
$$\delta W_i = F_i \delta q_i$$
4. Les F_i, $i = 1, \ldots, n$ sont alors les forces généralisées demandées.

Dans notre cas, nous avons δW_θ et δW_ψ avec comme travail virtuel total non nul $\delta W = \delta W_\theta + \delta W_\psi$. En prenant $\delta\theta \neq 0$ et $\delta\psi = 0$, les forces non conservatives (frottement + force aérodynamique) effectuent le travail
$$\delta W_\theta = \left(-C_\theta \dot{\theta} - C_m l \, \omega \, |\omega| \right) \delta\theta$$

avec l la longueur entre le centre de poussée de l'hélice et l'axe de rotation, C_θ la constante de couple de frottement visqueux, C_m la constante de poussée aérodynamique de l'hélice, ω la vitesse de rotation de l'hélice.
Il faut faire attention aux signes : La force de poussée aérodynamique produit du travail. Cependant la figure indique que le mouvement en avant de l'hélice est $-l\delta\theta$ donc le signe est $-$ dans le travail infinitésimal (lorsqu'on effectue $\delta\theta$ la force aérodynamique résiste au mouvement). Le moment de force de frottement visqueux entraîne un signe $-$ car il résiste au mouvement.
Ceci conduit à la force généralisée

$$F_\theta = -C_\theta\dot{\theta} - C_m l\,\omega\,|\omega|$$

Ensuite, en effectuant le déplacement infinitésimal $\delta\theta = 0$ et $\delta\psi \neq 0$, on trouve

$$\delta W_\psi = \left(-C_\psi\dot{\psi} + C_{m1}\sin\theta\,\omega, |\omega|\right)\delta\psi$$

avec C_{m1} le coefficient de couplage aérodynamique visqueux (relativement petit mais non négligeable car il induit une dérive) et C_ψ le coefficient de frottement visqueux de la barre autour de son axe de rotation avec la tige. Selon le pas de vis de l'hélice, le signe $+$ ou $-$ fait son apparition devant C_{m1}. Si le couplage à tendance à faire augmenter ψ on choisira le signe $+$. C'est la supposition qui est effectuée dans notre cas. Ainsi lorsque $\delta\psi$ augmente un travail est produit par le couplage aérodynamique. On constate également l'apparition de $\sin\psi$ car il y a projection du couplage aérodynamique : Lorsque la force latérale s'applique orthogonalement sur l'axe de rotation (lorsque $\theta = 0$), le couplage ne produit plus de couple autour de ψ (il n'y a plus de travail produit ou à effectuer pour vaincre ce couplage lors d'un déplacement infinitésimal $\delta\psi$). Ceci conduit à la force généralisée

$$F_\psi = -C_\psi\dot{\psi} + C_{m1}\sin\theta\,\omega\,|\omega|$$

Ces forces généralisées sont alors incorporées dans la méthode de Lagrange comme membre de droite à la place des 0 (les 0 qui apparaissent dans le cas de forces conservatives uniquement, ce qui n'est pas le cas avec les forces supplémentaires que nous avons envisagées) :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= F_\theta \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} &= F_\psi
\end{aligned}$$