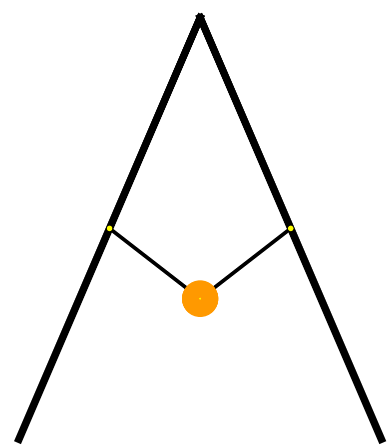
21 décembre 2022

Cerise sur le gâteau : Tréteau avec Masse

Enoncé : Deux poutres en bois, de masse m et de longueur l sont reliées entre elles par une articulation située sur une de leurs extrémités. Au mililieu des poutres se trouve une attache sur laquelle un fil inextensible est monté et qui relie le milieu de chaque poutre à une sphère unique de masse m (même masse que chacune des poutres). La longueur entre le centre de masse de la poutre et le centre de masse de la sphère est de $\frac{l}{4}$. Les extrémités libres des poutres sont posées sur le sol. Il n'y a pas de force de frottement. Le sol exerce une force perpendiculaire responsable de la contrainte (assimilée à une contrainte parfaite bilatérale). On demande de déterminer la position d'équilibre si elle existe, la gravité s'exerçant dans le plan vertical.



Application de la méthode des travaux virtuels

La méthode des travaux virtuels est appliquée pour résoudre le problème de statique. Par symétrie on peut considérer une seule poutre et la doubler au sens du travail des forces extérieurs qui s'exercent sur son centre de masse. La poutre de gauche n'est qu'une réplique de celle de droite. On peut donc considérer une seule poutre et simplement doubler la valeur du travail qui s'exerce sur elle.

Coordonnées, contraintes et degré de liberté

Pour positionner le dispositif, on peut décrire une poutre par les coordonnées cartésiennes de son centre de masse. La poutre de droite sera considérée. Celle de gauche est obtenue par symétrie. Les coordonnées du centre de masse de la poutre de droite sont x_1 et y_1. L'origine est située sur l'articulation des poutres et le vecteur $\hat{\boldsymbol{x}}$ horizontal et dirigé à droite et le vecteur $\hat{\boldsymbol{y}}$ vertical et dirigé vers le bas de telle sorte que $\boldsymbol{g} = g\hat{\boldsymbol{y}}$. Les coordonnées x_1 et y_1 ne sont pas libre mais sujette à la contrainte circulaire de se situer à la distance $\frac{l}{2}$ du point d'articulation :

$$C_1 = x_1^2 + y_1^2 - \frac{l^2}{4} = 0 \tag{1}$$

La masse est toujours située au dessus de l'origine et on peut prendre une seule coordonnée pour la décrire y_2. Celle-ci n'est pas libre mais doit se situer sur un arc de cercle centré sur le point d'attache du fil avec la poutre, le rayon du cercle étant la longueur du fil qui est $\frac{l}{4}$:

$$C_2 = x_1^2 + (y_1 - y_2)^2 - \frac{l^2}{16} = 0 \tag{2}$$

Ces deux contraintes sont indépendantes l'une de l'autre et nous obtenons ainsi un seul degré de liberté (on peut introduire la coordonnée généralisée θ, l'angle d'une poutre avec la verticale, angle mesuré au point de jonction des poutres ; nous avons trois coordonnées coordonnées cartésiennes non libres et deux contraintes).

Forces extérieures et principe des travaux virtuels

Les forces extérieures au système sont dus à la gravité uniquement. Le travail infinitésimal virtuel total des forces extérieures est

$$\delta W = m\, g\, \delta y_2 + 2\, m\, g\, \delta y_1$$

(Le travail d'une poutre a été doublé pour tenir compte de la symétrie.) Les δy_2 et δy_1 doivent satisfaire les contraintes pour un déplacement virtuel compatible avec les contraintes. A l'équilibre nous devons avoir $\delta W = 0$ ce qui donne

$$\delta y_2 + 2\delta y_1 = 0 \tag{3}$$

Déplacements virtuels compatibles

Il reste à calculer toutes les contraintes sur les accroissements virtuels δx_1, δy_1, δy_2. Ceci s'obtient par calcul différentiel en dérivant les contraintes

$$\delta C_1 = \frac{\partial C_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial C_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial C_1}{\partial x_3}\delta x_3 = 2x_1\, \delta x_1 + 2y_1\, \delta y_1 = 0 \tag{4}$$

$$\delta C_2 = \frac{\partial C_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial C_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial C_2}{\partial x_3}\delta x_3 = 2x_1\, \delta x_1 + 2(y_1 - y_2)\, \delta y_1 - 2(y_1 - y_2)\, \delta y_2 = 0 \tag{5}$$

Condition d'équilibre

En adjoignant la contrainte sur les accroissements virtuels δx_1, δy_1, δy_2 issue des travaux virtuels (3) aux contraintes (4) et (5), un système d'équations linéaires pour les déplacements virtuels est obtenu

$$\begin{aligned} x_1\, \delta x_1 + y_1\, \delta y_1 &= 0 \\ x_1\, \delta 2x_1 + 2(y_1 - y_2)\, \delta y_1 - 2(y_1 - y_2)\, \delta y_2 &= 0 \\ \delta y_2 + 2\delta y_1 &= 0 \end{aligned}$$

En écriture matricielle on a

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 - y_2 & -(y_1 - y_2) \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{pmatrix} = 0$$

et qui est équivalent par élimination triangulaire gaussienne (par combinaison linéaires et permutation entre les lignes de la matrice, on fait apparaître un bloc de zéros dans la partie triangulaire supérieure ; cf. cours d'algèbre linéaire) :
En remplaçant la deuxième ligne de la matrice par la différence entre la première ligne et la seconde,

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 \;\rightarrow \\ \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 - y_2 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & y_2 & y_1 - y_2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Après une permutation circulaire des lignes de la matrice (6), on procéde comme suit

$$\begin{array}{r} -2 \;\rightarrow \\ y_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & y_2 & y_1 - y_2 \\ 0 & 2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2y_1 + 3y_2 \\ 0 & 2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

En mots, on remplace la première ligne de la matrice (7) par la deuxième ligne multipliée par y_2 dont on retranche deux fois la première ligne, pour finalement obtenir le système équivalent

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2y_1+3y_2 \\ 0 & 2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{pmatrix} = 0$$

et ainsi le produit de la première ligne de la matrice par la colonne des accroissements indique

$$(-2y_1+3y_2)\delta y_2 = 0$$

ce qui fournit, puisque δy_2 peut être arbitraire, et donc non nul,

$$y_1 = \frac{3}{2}y_2 \tag{8}$$

En repportant cette expression dans C_1 et C_2, cf. (1) et (2), on obtient deux nouvelles équations quadratiques qui sont les équations de deux ellipses

$$x_1^2 + \frac{9}{4}y_2^2 = \frac{1}{4}l^2 \tag{9}$$

$$x_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 = \frac{1}{16}l^2 \tag{10}$$

et on obtient quatre solutions

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}l & y_2 &= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}l \\
x_1 &= -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}l & y_2 &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}l \\
x_1 &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}l & y_2 &= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}l \\
x_1 &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}l & y_2 &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}l \qquad (11)
\end{aligned}$$

et seule la dernière solution (11) correspond au choix du repère centré sur l'articulation des poutres avec $\hat{\boldsymbol{y}}$ qui pointe vers le bas de telle sorte que $\boldsymbol{g} = g\hat{\boldsymbol{y}}$. Cette solution conduit à la figure représentée. La hauteur entre le sol et l'articulation des deux poutres s'écrit en utilisant (8) et (11)

$$h = 2y_1 = 3y_2 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}l$$

et la largeur entre le pied au sol et l'origine (point au sol immédiatement au dessous de la masse) est

$$d = 2x_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}l$$

L'angle entre la verticale descendante et la poutre de droite est alors

$$\theta = \arctan\left(\frac{d}{h}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 0.406 \qquad \text{[rad]}$$