Complément

Energie cinétique d'un corps solide

L'objectif de ce complément est de démontrer la formule de l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} M \mathbf{v_G} \bullet \mathbf{v_G} + \frac{1}{2}(\mathbf{I_G}\,\omega) \bullet \omega$$

à partir de l'énergie cinétique de chacun des points matériels que constitue le corps solide. On part de l'hypothèse que le corps solide possède un nombre fini de points matériels pour faciliter la démonstration. L'idée centrale est d'utiliser la cinématique du solide

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v_G} + \omega \wedge \mathbf{GP}_\alpha$$

pour utiliser le vecteur de rotation instantané du solide ω et également le théoréme du centre de masse qui dit que

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{GP}_\alpha = 0$$

Démonstration

On part de l'énergie cinétique de chaque point matériel que l'on somme

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \bullet \mathbf{v}_\alpha \\
&= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{v_G} + \omega \wedge \mathbf{GP}_\alpha) \bullet (\mathbf{v_G} + \omega \wedge \mathbf{GP}_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\sum_\alpha \mathbf{v_G} \bullet \mathbf{v_G} + \left[\sum_\alpha m_\alpha(\omega \wedge \mathbf{GP}_\alpha)\right] \bullet \mathbf{v_G} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\omega \wedge \mathbf{GP}_\alpha) \bullet (\omega \wedge \mathbf{GP}_\alpha) \qquad (1) \\
&= \frac{1}{2} M \mathbf{v_G} \bullet \mathbf{v_G} + 0 + \frac{1}{2}(\mathbf{I_G}\omega) \bullet \omega \qquad (2)
\end{aligned}$$

Le théorème du centre de masse à été utilisé lors de la dernière étape du calcul, en effet

$$
\begin{aligned}
\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{GP}_\alpha &= 0 \\
&\Rightarrow \\
\left[\sum_\alpha m_\alpha(\omega \wedge \mathbf{GP}_\alpha)\right] \bullet \mathbf{v_G} &= \left(\omega \wedge (\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{GP}_\alpha)\right) \bullet \mathbf{v_G} = 0 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

ce qui permet d'annuler le terme du milieu de (1). De plus, le développement suivant est également recquis pour passer de (1) à (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\omega \wedge \mathbf{GP}_\alpha) \bullet (\omega \wedge \mathbf{GP}_\alpha) &= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\mathbf{GP}_\alpha \wedge \omega) \bullet (\mathbf{GP}_\alpha \wedge \omega) \\
&= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha([\mathbf{GP}_\alpha \wedge]\omega)^T([\mathbf{GP}_\alpha \wedge]\omega) \\
&= \frac{1}{2}\omega^T\left(\sum_\alpha m_\alpha [\mathbf{GP}_\alpha \wedge]^T[\mathbf{GP}_\alpha \wedge]\right)\omega \qquad (4) \\
&= \frac{1}{2}\omega^T \mathbf{I_G}\omega \qquad (5) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{I_G}\omega) \bullet \omega
\end{aligned}
$$

Ceci est justifié en exprimant $\mathbf{GP}_\alpha$ dans le repère lié au solide

$$
\mathbf{GP}_\alpha = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}''
$$

et en utilisant l'étape clé

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{GP}_\alpha \wedge]^T[\mathbf{GP}_\alpha \wedge] &= \\
& \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2x_2^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ce qui permet de faire apparaître l'expression du tenseur d'inertie en sommant sur α (passage de (4) à (5)).