# Exemple Supplémentaire

## 1. Bille sur tige qui roule ou patine sur le sol

**Enoncé du problème** Une bille pleine de masse $m$ est reliée par une tige à l'origine $O$. La bille repose sur le sol et peut ainsi se mouvoir en patinant sur le sol mais est toujours en contact avec celui-ci. L'angle entre la verticale (axe $x_3$) et l'axe de la tige (axe $x_3''$) est de $\frac{\pi}{3}$. La distance entre le centre de masse $G$ et l'origine est de $2a$. La masse de la tige est négligeable vis-à-vis de la bille. Le tenseur d'inertie au point $O$ et d'axes confondus avec les axes principaux d'inertie est connu. On désignera par $A$ le point de contact avec le sol. On demande les équations du mouvement et on prendra les angles d'Euler $\psi$, $\theta$, $\phi$ (rotations 3-1-3) comme angles de référence.

**Choix des repères :** Le repère $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$ est fixe et le repère $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1', \hat{\boldsymbol{x}}_2', \hat{\boldsymbol{x}}_3')$ est obtenu après une rotation du repère fixe autour de l'axe $x_3$ d'un angle $\psi$ afin de faire coïncider le plan générer par $\hat{\boldsymbol{x}}_2'$ et $\hat{\boldsymbol{x}}_3'$ avec le plan perpendiculaire au sol et contenant la tige et le centre de masse de la bille. Le repère $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1'', \hat{\boldsymbol{x}}_2'', \hat{\boldsymbol{x}}_3'')$ est ensuite obtenu à partir du repère $'$ par une rotation d'angle $\theta$ autour de l'axe $Ox_1'$ afin que l'axe $Ox_3''$ s'aligne avec l'axe de la tige. Finalement, le repère lié au solide $'''$ est obtenu à partir du repère $''$ par une dernière rotation autour de l'axe $Ox_3''$ (qui est l'axe de la tige) d'angle $\phi$.

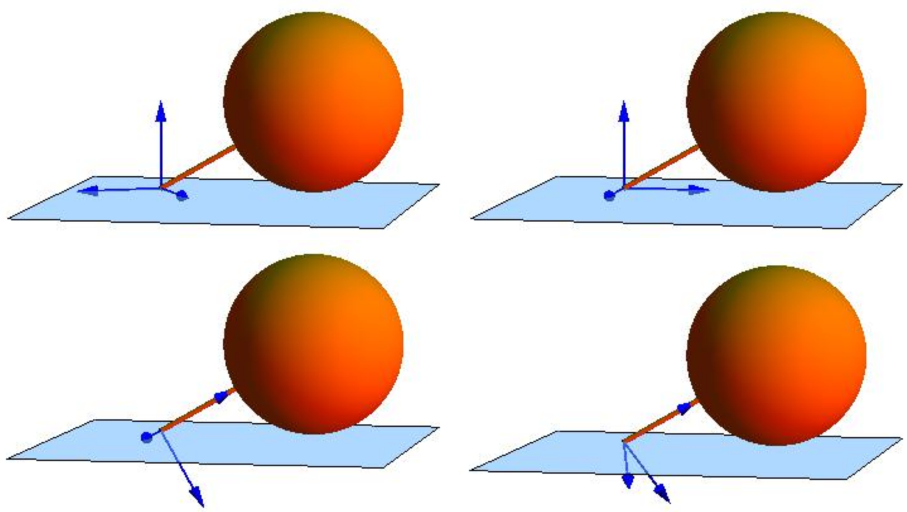

Figure 1 – Les quatres repères : en haut à gauche $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$, en haut à droite $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1', \hat{\boldsymbol{x}}_2', \hat{\boldsymbol{x}}_3')$, en bas à gauche $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1'', \hat{\boldsymbol{x}}_2'', \hat{\boldsymbol{x}}_3'')$, et finalement en bas à droite $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1''', \hat{\boldsymbol{x}}_2''', \hat{\boldsymbol{x}}_3''')$

**Résolution :** Le vecteur instantané de rotation a deux composantes qui sont initialement exprimées dans deux repères distincts, le repère lié au référentiel

$$(O, \boldsymbol{\hat{x}_1}, \boldsymbol{\hat{x}_2}, \boldsymbol{\hat{x}_3})$$

et le repère orienté avec le solide mais pas lié à lui (ce repère ne tourne pas selon l'axe de la tige avec la vitesse $\dot{\phi}$)

$$(O, \boldsymbol{\hat{x}_1^{''}}, \boldsymbol{\hat{x}_2^{''}}, \boldsymbol{\hat{x}_3^{''}})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{\hat{x}_3} + \dot{\phi}\boldsymbol{\hat{x}_3^{''}}$$

Le tenseur d'inertie selon le repère $(O, \boldsymbol{\hat{x}_1^{''}}, \boldsymbol{\hat{x}_2^{''}}, \boldsymbol{\hat{x}_3^{''}})$ et $(O, \boldsymbol{\hat{x}_1^{'''}}, \boldsymbol{\hat{x}_2^{'''}}, \boldsymbol{\hat{x}_3^{'''}})$ est identique et diagonal

$$\boldsymbol{I_O} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Pour justifier ceci, on part du repère diagonal lié au solide et on effectue un changement de base de matrice de passage $P$ en tournant autour de l'axe $Ox_3^{'''}$ et on se rend compte que la matrice ne change pas par transformation de similarité $\boldsymbol{P I_O P}^{-1}$. Une autre façon de justifier ceci est de constater que l'inertie ne change pas lors d'une rotation autour de l'axe de la tige.
Dans une large classe de problèmes similaires dont celui-ci fait partie, on se retrouve à utiliser les formules de la dynamique exprimées dans le repère inertiel (repère fixe). C'est la dérivée du moment cinétique qui est lié au moment de force extérieur. Le moment cinétique est exprimé à partir de la vitesse instantanée de rotation en utilisant le tenseur d'inertie. Cependant, le tenseur d'inertie est toujours lié au solide (les axes du tenseur étant fixes par rapport au solide). Ainsi, il faut d'abord ramener la vitesse angulaire dans le repère pour lequel le tenseur d'inertie est connu, puis soit ramener le tout dans le repère inertiel, soit exprimer le moment cinétique dans le repère mobile. C'est cette dernière option qui est appliquée ici.
Commençons par exprimer le vecteur de vitesse instantané de rotation dans le repère unique

$$(O, \boldsymbol{\hat{x}_1^{''}}, \boldsymbol{\hat{x}_2^{''}}, \boldsymbol{\hat{x}_3^{''}})$$

On constate que le repère $(O, \boldsymbol{\hat{x}_1}, \boldsymbol{\hat{x}_2}, \boldsymbol{\hat{x}_3})$ subit deux rotations successives (le repère tourne, le point reste fixe), d'abord selon l'axe $Ox_3$, puis selon l'axe $Ox_1^{'}$. Il est important de remarquer que les matrices respectives apparaissent dans le sens contraire de gauche à droite (sens de la lecture), on aura d'abord la matrice de la rotation selon $x_1^{'}$ puis celle de la rotation selon $x_3$. C'est normal car la seconde matrice agit en premier sur le vecteur $\dot{\psi}\boldsymbol{x_3}$ :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta\dot{\psi} \\ \cos\theta\dot{\psi} + \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boldsymbol{\Omega} = \sin\theta\dot{\psi}\boldsymbol{\hat{x}_2^{''}} + (\cos\theta\dot{\psi} + \dot{\phi})\boldsymbol{\hat{x}_3^{''}}$$

A ce stade, introduisons un nouveau vecteur de rotation $\boldsymbol{\omega}$ qui est la vitesse instantanée de rotation du repère mobile

$$(O, \boldsymbol{\hat{x}_1^{''}}, \boldsymbol{\hat{x}_2^{''}}, \boldsymbol{\hat{x}_3^{''}})$$

par rapport au repère fixe

$$(O, \boldsymbol{\hat{x}_1}, \boldsymbol{\hat{x}_2}, \boldsymbol{\hat{x}_3})$$

qui s'exprime comme

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta\dot{\psi} \\ \cos\theta\dot{\psi} \end{pmatrix} = \sin\theta\dot{\psi}\boldsymbol{\hat{x}_2^{''}} + \cos\theta\dot{\psi}\boldsymbol{\hat{x}_3^{''}}$$

Soit $\boldsymbol{L_O}$ le moment cinétique au point $O$ qui s'obtient en multipliant le tenseur d'inertie au point $O$ par le vecteur de rotation instantané du solide $\boldsymbol{\Omega}$. On obtient un moment cinétique exprimé dans le repère $''$

$$\boldsymbol{L_O} = \boldsymbol{I_O}\boldsymbol{\Omega} = I\sin\theta\dot{\psi}\boldsymbol{x_2''} + I_3(\cos\theta\dot{\psi} + \dot{\phi})\boldsymbol{\hat{x}_3''} \tag{1}$$

Comme le point $O$ est un point fixe, on peut appliquer la loi de la dynamique sous la forme

$$\frac{d\boldsymbol{L_O}}{dt} = \boldsymbol{M_O^{ext}}$$

Dans cette formule, le moment cinétique $\boldsymbol{L_O}$ et le moment de force extérieur $\boldsymbol{M_O^{ext}}$ sont tous deux des quantités qui peuvent s'exprimer selon plusieurs repères. Nous allons les exprimer dans le repère $''$.

**Remarque importante :** L'opérateur de dérivée $\frac{d}{dt}$ est relatif au référentiel. Le mouvement de chaque point laisse "une trace différente" dans chaque référentiel. Soit le référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel le repère $(0, \boldsymbol{\hat{y}_1}, \boldsymbol{\hat{y}_2}, \boldsymbol{\hat{y}_3})$ est lié. Ainsi

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} \boldsymbol{v}$$

désigne la dérivée de $\boldsymbol{v}$ dans le référentiel en mouvement $\mathcal{R}'$. Si $\boldsymbol{v}$ s'exprime dans le repère mobile comme

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{\hat{y}_1} + v_2\boldsymbol{\hat{y}_2} + v_3\boldsymbol{\hat{y}_3}$$

alors

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} \boldsymbol{v} = \dot{v}_1\boldsymbol{\hat{y}_1} + \dot{v}_2\boldsymbol{\hat{y}_2} + \dot{v}_3\boldsymbol{\hat{y}_3}$$

au lieu de

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \dot{v}_1\boldsymbol{\hat{y}_1} + \dot{v}_2\boldsymbol{\hat{y}_2} + \dot{v}_3\boldsymbol{\hat{y}_3} + v_1\dot{\boldsymbol{\hat{y}}}_1 + v_2\dot{\boldsymbol{\hat{y}}}_2 + v_3\dot{\boldsymbol{\hat{y}}}_3$$

et la formule de Poisson $\dot{\boldsymbol{\hat{y}}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\hat{y}_i}$, $i = 1, 2, 3$ permet de connecter ces deux dérivées ($\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse de rotation instantanée du repère $(O, \boldsymbol{\hat{y}_1}, \boldsymbol{\hat{y}_2}, \boldsymbol{\hat{y}_3})$ par rapport au repère fixe). En désignant le référentiel $\mathcal{R}''$ celui dans lequel le repère $(O, \boldsymbol{\hat{x}_1''}, \boldsymbol{\hat{x}_2''}, \boldsymbol{\hat{x}_3''})$ est attaché, nous avonc

$$\frac{d\boldsymbol{L_O}}{dt} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{R}''} \boldsymbol{L_O} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{L_O}$$

et en développant

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{R}''} \boldsymbol{L_O} = \frac{d}{dt}(I\sin\theta\dot{\psi})\boldsymbol{\hat{x}_2''} + \frac{d}{dt}(I_3(\cos\theta\dot{\psi} + \dot{\phi}))\boldsymbol{\hat{x}_3''}$$

et

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{L_O} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\hat{x}_1''} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\hat{x}_2''} & \sin\theta\dot{\psi} & I\sin\theta\dot{\psi} \\ \boldsymbol{\hat{x}_3''} & \cos\theta\dot{\psi} & I_3(\cos\theta\dot{\psi} + \dot{\phi}) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\theta[(I_3 - I)\dot{\psi}\cos\theta + I_3\dot{\phi}] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \dot{\psi}\sin\theta[(I_3 - I)\dot{\psi}\cos\theta + I_3\dot{\phi}]\boldsymbol{\hat{x}_1''}
\end{aligned}$$

En conséquence, la dérivée du moment cinétique est déterminée

$$\frac{d\boldsymbol{L_O}}{dt} = \dot{\psi}\sin\theta[(I_3 - I)\dot{\psi}\cos\theta + I_3\dot{\phi}]\boldsymbol{\hat{x}_1''} + \frac{d}{dt}(I\dot{\psi}\sin\theta)\boldsymbol{\hat{x}_2''} + \frac{d}{dt}I_3(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\boldsymbol{\hat{x}_3''}$$

Il reste l'effet du moment de force extérieur à déterminer qui s'obtient en remarquant que les forces extérieures appliquées au solide sont le poids $-mg\boldsymbol{\hat{x}_3}$ appliqué au point $G$ et la réaction au plan

$T\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{3}}$ qui s'applique au point de contact avec le sol $A$. Toutes deux engendrent des moments de forces orientés selon $\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}''$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}^{\mathrm{e}\boldsymbol{x}\boldsymbol{t}} &= \boldsymbol{OG} \wedge (-mg\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{3}}) + \boldsymbol{OA} \wedge (T\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{3}}) \\ &= -\sqrt{3}mga\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}'' + \sqrt{3}aT\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}'' \end{aligned}$$

En mettant ensemble ce que nous avons obtenus, l'équation de la dynamique

$$\frac{d\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{O}}}{dt} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}^{\mathrm{e}\boldsymbol{x}\boldsymbol{t}}$$

s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\psi}\sin\theta[(I_3 - I)\dot{\psi}\cos\theta + I_3\dot{\phi}] &= a\sqrt{3}(T - mg) && (2) \\ I\dot{\psi}\sin\theta &= \text{constant} && (3) \\ I_3(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}) &= \text{constant} && (4) \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième et la troisième équation (3) et (4), on déduit que $\dot{\psi}$ et $\dot{\phi}$ demeurent constants (égaux aux conditions initiales $\dot{\psi}_0$ et $\dot{\phi}_0$ respectivement) tout au long du mouvement. Le mouvement est ainsi un mouvement circulaire uniforme. En conséquence, La vitesse du centre de masse est

$$\dot{\boldsymbol{OG}} = -a\sqrt{3}\dot{\psi}_0\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}'$$

et l'accélération

$$\ddot{\boldsymbol{OG}} = -a\sqrt{3}\dot{\psi}_0^2\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}}'$$

En désignant par $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{O}}$ la réaction au point d'attache qui s'exerce sur la tige, on a en en appliquant le théorème du centre de masse

$$m\ddot{\boldsymbol{OG}} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{O}} + (T - mg)\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{3}}$$

et on obtient la réaction au point $O$ d'attache de la tige

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{O}} = -ma\sqrt{3}\dot{\psi}_0^2\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}}' + (mg - T)\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{3}}$$

Cette réaction est maintenant déterminée en fonction des conditions initiales en utilisant l'équation (2).

(N.B. ce problème est adapté d'un problème de Henri Cabannes, "Problèmes de Mécanique Générale", Dunod, 1965)