Formulaire

Coordonnées cylindriques

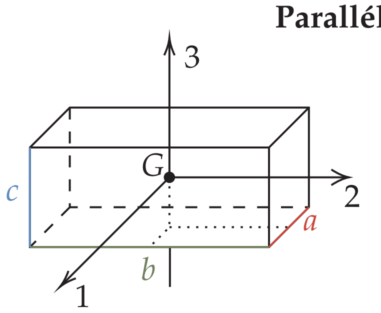
$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho + z\,\hat{e}_z$
$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z$
$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\,\hat{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$

Coordonnées sphériques

$\vec{r} = r\,\hat{e}_r$
$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$
$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{e}_\theta + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{e}_\phi$

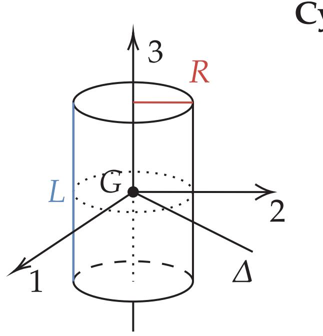
Moments d'inertie usuels

Parallélépipède rectangle plein



$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{12}M\left(b^2+c^2\right) \\ I_2 = \dfrac{1}{12}M\left(c^2+a^2\right) \\ I_3 = \dfrac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right) \end{cases}$$

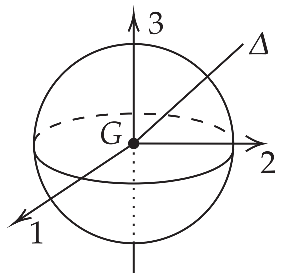
Cylindre de révolution



Plein : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \dfrac{1}{4}MR^2 + \dfrac{1}{12}ML^2$
$I_3 = \dfrac{1}{2}MR^2$

Creux : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \dfrac{1}{2}MR^2 + \dfrac{1}{2}ML^2$
$I_3 = MR^2$

Sphère



Boule pleine : $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \dfrac{2}{5}MR^2$

Sphère creuse : $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \dfrac{2}{3}MR^2$

Ne pas ouvrir ce feuillet avant le signal de début d'examen
... mais lire attentivement cette page de couverture

SEUL LE CAHIER DE REPONSES SERA CORRIGE

Avant le début de l'examen

— Vérifiez les informations présentes sur le cahier de réponses
— Signez la page de garde du cahier de réponse
— Posez votre carte d'étudiant(e) EPFL sur la table devant vous.
— Ne laissez sur votre table que le matériel autorisé, à savoir :
  — formulaire personnel manuscrit, max. 1 feuille A4 recto-verso (= 2 pages) ;
  — stylos, crayons, gomme, règle, taille-crayon ;
  — boisson + ravitaillement léger.
— Attendez le signal pour ouvrir ce feuillet et débuter l'examen
— Un formulaire se trouve à la dernière page de ce feuillet

Pendant l'examen

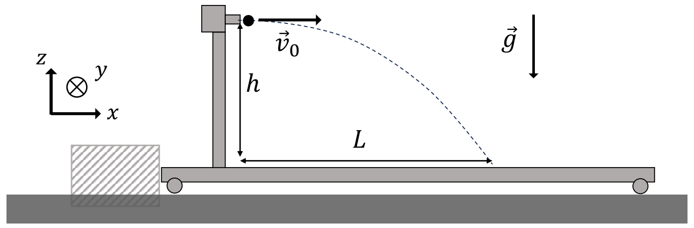
— Pour chacun des problèmes :
  — **Répondez à chaque question de chaque problème dans la partie correspondante du cahier, en justifiant vos réponses.**
  — Écrivez lisiblement le développement menant à la solution.
  — Ne dégrafez pas les pages du cahier.
  — La place étant limitée, utilisez d'abord les feuilles de brouillon avant de reporter vos réponses au propre.
— Ne laissez pas vos brouillons ou vos solutions à côté de vous.
— Ne quittez pas la salle sans autorisation.

A la fin de l'examen (après 3h30 ou quand vous avez terminé)

— Restez assis(e) à votre place en silence et attendez l'arrivée d'un surveillant.
— Rendez le cahier de réponses **signé** et le feuillet d'énoncé en mains propres à un surveillant qui vous fera signer la liste de présence.

1 Lancer sur plateforme mouvante (11 points)

Une balle, considérée comme un point matériel de masse m, est propulsée horizontalement vers la droite à partir d'une hauteur h par un lanceur capable de convertir une énergie stockée ΔK en énergie cinétique finale. L'ensemble se trouve sur une plateforme de masse M (comprenant la masse du mécanisme de propulsion). On néglige les frottements de l'air et on considère que la plateforme ne décolle jamais du sol. Le sol est un référentiel galiléen pour ce problème.



Dans un premier temps, la plateforme est empêchée de se déplacer vers la gauche par un bloc immobile (rectangle hachuré sur la figure).

a) Calculer la distance L parcourue horizontalement par la balle avant qu'elle ne retombe sur la plateforme, en fonction de ΔK et des autres données du problème.

b) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}_f$ de la balle juste avant le choc avec la plateforme.

c) En admettant qu'un choc mou ait lieu entre la balle et la plateforme, calculer la vitesse v_1 de la plateforme par rapport au sol juste après l'impact.

On considère désormais que la plateforme est libre de se déplacer sur le sol sans frottement vers la droite ou la gauche au moment du lancer car le bloc immobile est retiré.

d) Exprimer la vitesse initiale horizontale $\vec{v}_0$ du projectile par rapport au sol, en fonction de ΔK.

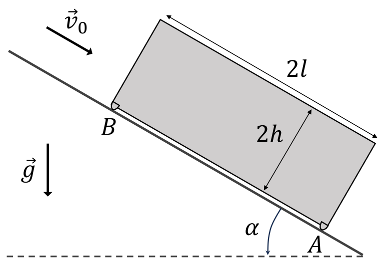
e) Calculer la distance L' entre le lanceur et l'endroit où la balle touche la plateforme. Exprimer L' en fonction de la distance L trouvée à la question a).

f) Dans quelle limite sur $\frac{M}{m}$ retrouve-t-on $L' = L$? Commentez.

g) Pour M et m quelconques, calculer la vitesse finale v_p de la plateforme par rapport au sol après le choc mou.

2 Bloc glissant sur une pente (12 points)

Un solide homogène de masse m, de côté rectangulaire (longueur $2l$, hauteur $2h$), est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ sur un sol plan faisant une pente α avec l'horizontale. Il subit des frottements secs (coefficient cinétique μ_c) aux deux seuls points de contact avec le sol, A et B. On néglige les frottements de l'air, et on considère qu'il glisse sans basculer (B ne décolle pas) sur une distance L.



a) Faire un schéma avec le bilan des forces externes s'exerçant sur le solide.

b) Calculer la norme v_f de la vitesse du solide après une distance L parcourue le long de la pente, en fonction de $v_0 = |\vec{v}_0|$ et des autres paramètres.

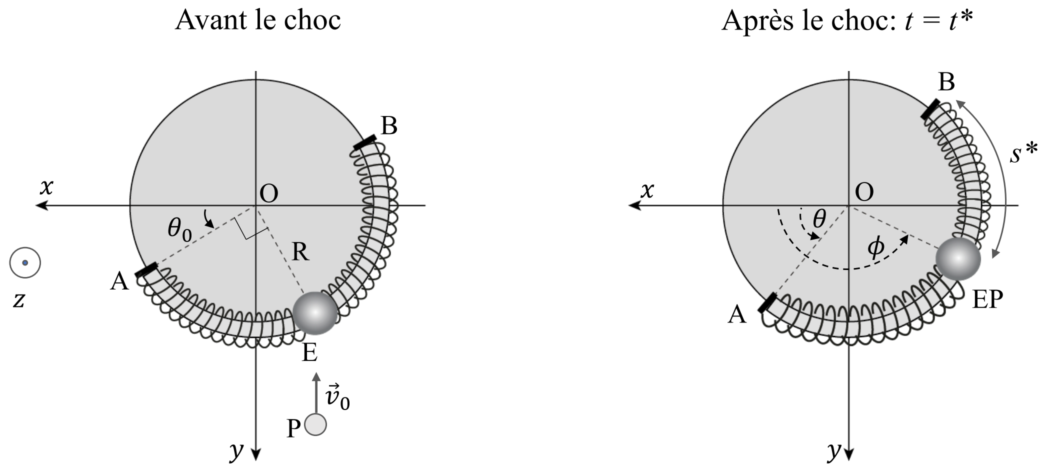
c) Établir une condition sur μ_c de la forme $f_1(\alpha) < \mu_c < f_2(\alpha)$ afin que $0 < v_f < v_0$ (c'est à dire, le solide a ralenti, sans s'arrêter), où f_1 et f_2 sont des fonctions à déterminer.

d) Établir l'expression de la force normale au sol s'exerçant sur le point B pendant le mouvement.

e) Écrire la condition sur μ_c pour que le point B ne décolle pas du sol, en fonction de h et l seulement.

3 Métronome horizontal tournant (14 points)

Un disque homogène de masse M et rayon R, posé sur un plan horizontal Oxy, peut tourner sans frottement autour d'un axe vertical passant par son centre O, fixe dans le référentiel lié à $Oxyz$. Un point E de masse m peut glisser sans frottement sur un guide de masse négligeable fixé le long du bord du disque. Le point E est relié à deux points A et B, diamétralement opposés et fixes par rapport au disque, par deux ressorts identiques de raideur k, de masse négligeable et initialement au repos (longueurs à vide $l_0 = \frac{\pi}{2}R$). Les ressorts glissent sans frottement le long du guide.



Un point P de masse m_0 se déplace sur le même plan horizontal avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dirigée selon $-\vec{e}_y$ vers le point E. A l'instant $t = 0$, P entre en collision avec E ; sous l'effet d'un choc mou, les deux points forment le corps EP (considéré comme un point matériel). Pendant la collision, on admet que le disque reste immobile et que les ressorts n'exercent pas de force sur EP.

a) Calculer la vitesse du corps EP immédiatement après la collision.

On définit l'instant t^* où EP atteint la plus petite distance curviligne s^* par rapport à B. On admet que les paramètres sont tels que EP n'atteint jamais B.

b) Donner deux quantités conservées pour le système "disque + corps EP + ressorts" après la collision, en justifiant.

c) Exprimer la relation qui existe à l'instant t^* entre la vitesse angulaire du disque, $\dot{\theta}$, et la vitesse angulaire de EP, $\dot{\phi}$.

d) Calculer la vitesse angulaire du disque à l'instant t^*.

e) Calculer la distance s^*.