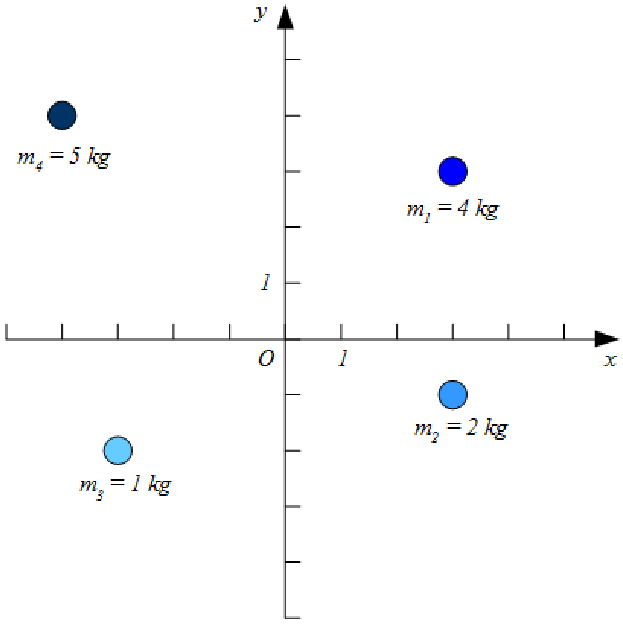
10 décembre 2024 *J.-P. Hogge*

Série 13 :

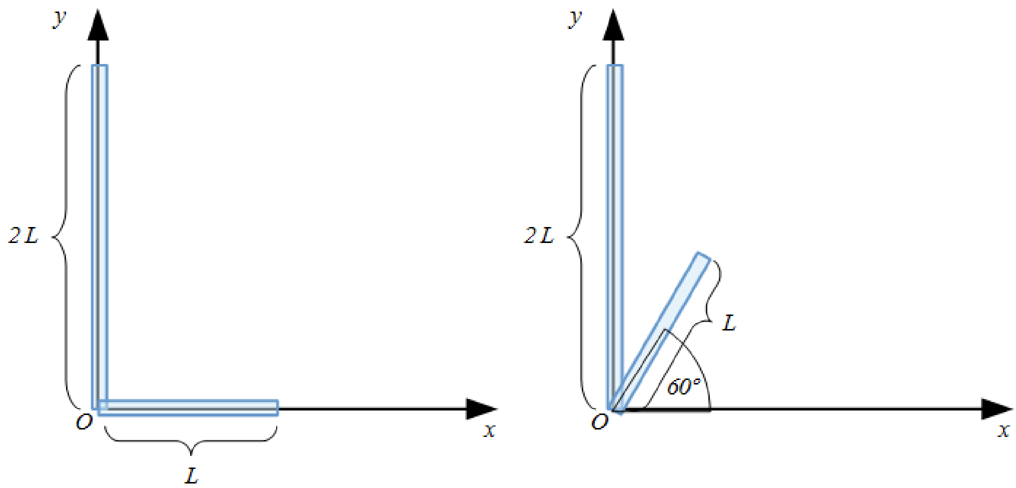
Exercice 1: Centre de masse

Trouvez le centre de masse des objets solides suivants :

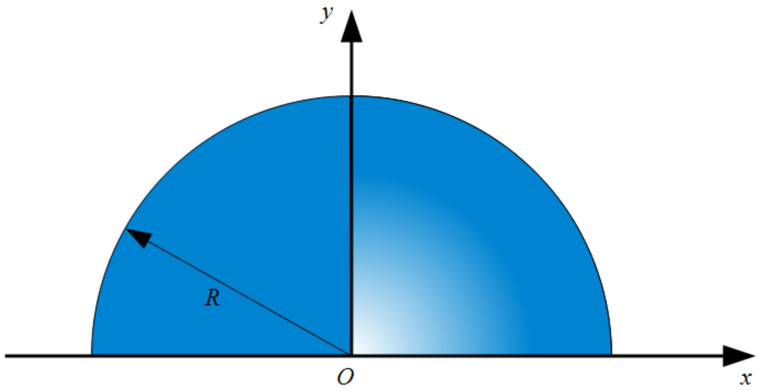
(a) 4 particules de masses différentes.



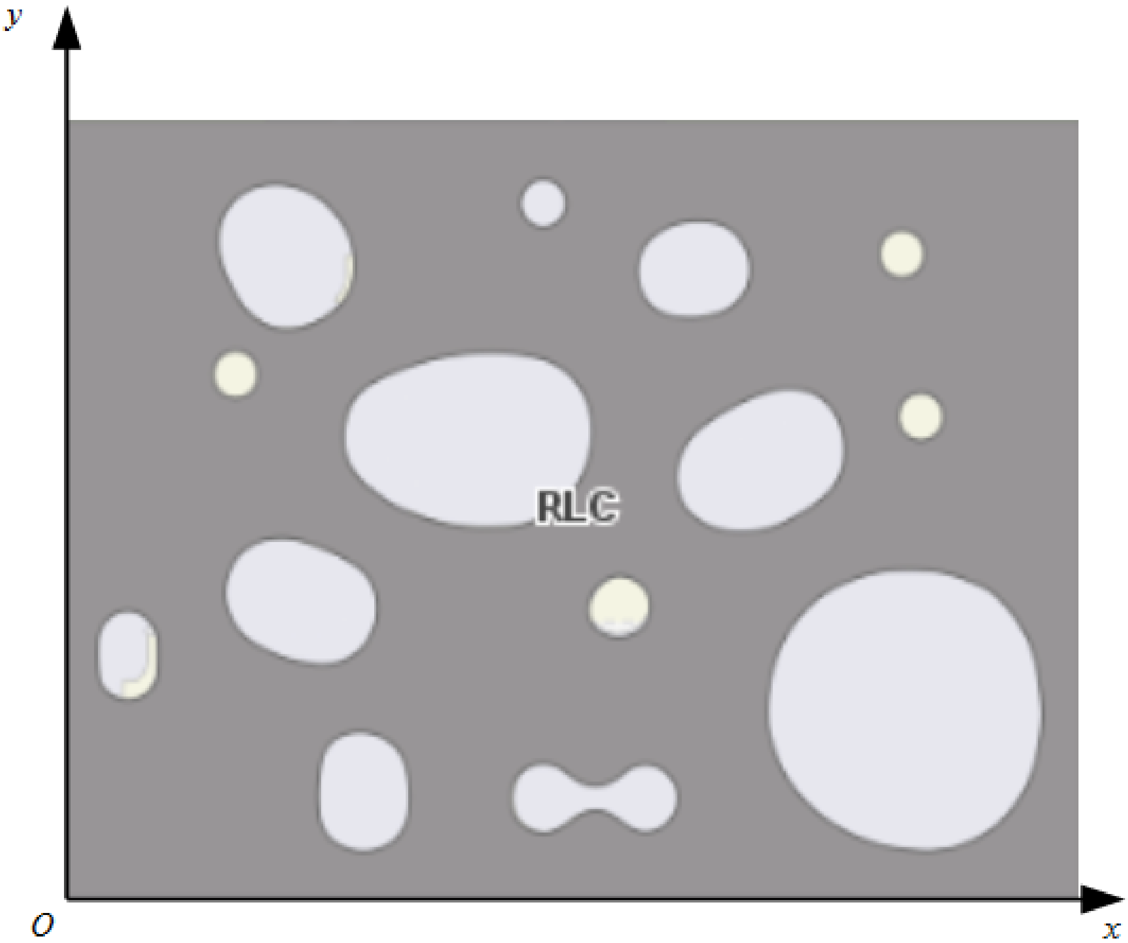
(b) 2 tiges de la même densité linéaire (masse par longueur) λ.



(c) On considère un demi-disque, dont la moitié gauche est de densité de surface uniforme $\sigma = \sigma_c$ et l'autre moitié de densité non-uniforme. La densité de la partie droite est nulle au centre du disque (O) et augmente linéairement dans la direction radiale jusqu'à ce qu'elle prenne le même valeur (maximale) que la densité de la moitié gauche, $\sigma(R) = \sigma_c$.



(d) Le Rolex Learning Center. Mesurez les quantités nécessaires directement sur la figure. Une réponse approximative est suffisante, mais soyez libre de l'élaborer si vous le voulez. Est-il important que le bâtiment soit plat ou pas ?



Exercice 2: Trois méthodes équivalentes pour l'étude d'un mouvement

Un point matériel de masse m est contraint de glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O via une tige rigide. Cette tige de longueur R et de masse considérée comme nule peut librement pivoter autour de O sans frottement, maintenant ainsi le point matériel sur le cerceau. Le point matériel est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos négligeable.

(a) En utilisant l'une des 3 méthodes suivantes (vous pourrez vous convaincre que les deux autres méthodes vous permettent de parvenir au même résultat en lisant le corrigé), montrer que l'équation du mouvement du mobile peut s'écrire de la manière suivante (avec $\omega_1^2 = \frac{g}{R}$ et $\omega_2^2 = \frac{k}{m}$) :

$$\ddot{\theta} = -\omega_1^2 \sin\theta + \omega_2^2 \cos\theta \tag{18}$$

  i. Seconde loi de Newton

  ii. Théorème du moment cinétique

  iii. Bilan énergétique

  <u>Indication</u> : Si cela s'avère nécessaire dans plusieurs de ces trois méthodes, utiliser les deux formules trigonométriques suivantes :

$$\sin(2A) = 2\cos(A)\sin(A) \tag{19}$$

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) \tag{20}$$

(b) En partant de l'équation du mouvement, trouver les deux angles pour lesquels le système est à l'équilibre

(c) Pour chacun de ces deux angles, déterminer si l'équilibre est stable ou instable

<u>Indication</u> : Pour calculer la dérivé seconde de l'énegie potentielle, on pourra utiliser les deux formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(A)^2 = \frac{1 + cos(2A)}{2} \tag{21}$$

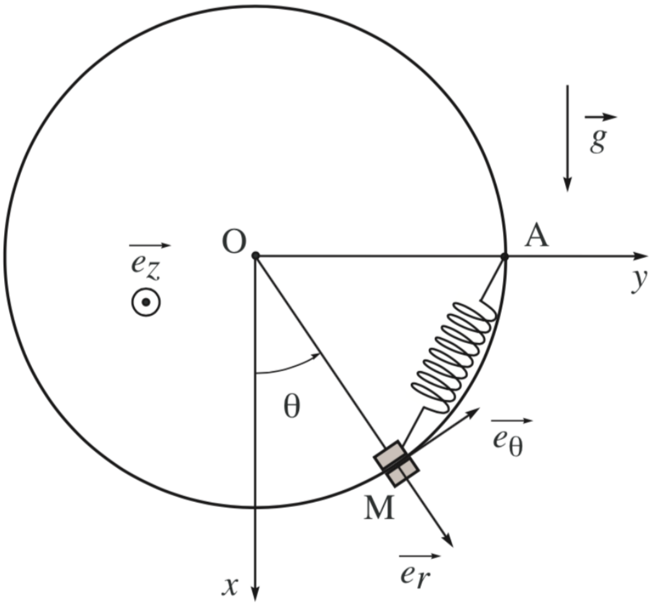
$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \tag{22}$$

(d) Trouver la période des petites oscillations ayant lieu au voisinage de la position d'équilibre stable.

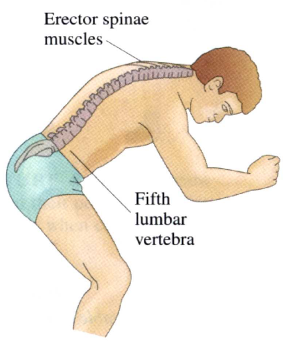
<u>Indication</u> : Induire une perturbation à l'équilibre $\delta\theta$ tel que $\theta = \theta_{eq} + \delta\theta$ et utiliser :

$$\sin(\theta_{eq} + \delta\theta) = \sin(\theta_{eq}) + \cos(\theta_{eq})\delta\theta \tag{23}$$

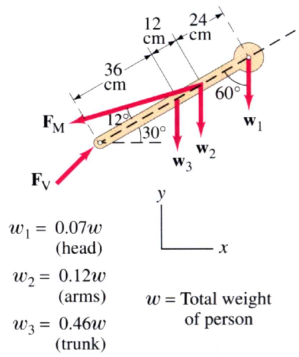
$$\cos(\theta_{eq} + \delta\theta) = \cos(\theta_{eq}) - \sin(\theta_{eq})\delta\theta \tag{24}$$



Exercice 3:
Estimez l'amplitude de la force F_V exercée par la colonne vertébrale sur la cinquième vertèbre. On utilisera le modèle simplifié décrit sur la figure ci-dessous.



(a)



On suppose :

— que la colonne vertébrale est rectiligne,

— que l'angle qu'elle fait avec l'horizontale est de 30 degrés,

— que la force exercée par les muscles du dos s'applique au niveau des bras et qu'elle fait un angle de 12 degré avec la colonne,

— que le poids w_1 de la tête correspond à 7% du poids total w, le poids des bras w_2 compte pour 12% et que le poids du tronc pour 46%,

— les dimensions et les points d'applications des forces sont décrits sur la figure.

Exercice 4: Formule de composition des rotations (dérivation de la formule vue en cours)

Le but de ce problème est de vérifier qu'un système qui est soumis à deux rotations de vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}_{\text{rel}}$ ets équivalent au même système soumis à une seule rotation de vecteur

$$\vec{\Omega}_{\text{tot}} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_{\text{rel}}$$

.

Un disque de rayon r tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire ω_{rel}. Ce même axe tourne autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire Ω (voir figure ci-dessous).

(a) Vérifiez la formule de composition des rotations en exprimant la vitesse d'un point P situé à la périphérie du disque dans le référentiel du laboratoire $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

(b) Comparez le résultat avec la formule vue en cours. Développez cette formule selon besoin pour clarifier la comparaison.