

Série 2 : Rappels mathématiques et cinématique

Exercice 1: Dérivation

(a) Déterminez les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{-3x^2 - x}{\sqrt{2x^3 + x + 7}}$

2. $f(x) = \cos^2(\ln x)$

3. $f(x) = \exp(\ln x + 1)$

(b) On donne les fonctions de deux variables x et y suivantes :

1. $f(x, y) = \cos y + x\sqrt{x^2 + 2xy + y}$

2. $f(x, y) = \frac{x^3 - 4x^2y}{2y + 7}$

En faisant l'hypothèse que y est constante, dérivez les fonctions par rapport à x , puis faites de même en faisant l'hypothèse que x est constante et en dérivant par rapport à y . Vous aurez déterminé les *dérivées partielles* de f par rapport à x et y , notées respectivement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$

Exercice 2: Cercle trigonométrique

(a) Tracer un cercle de rayon 1 centré à l'origine et une droite faisant un angle α avec l'axe horizontal x .

(b) Représenter graphiquement $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ et $\cot \alpha$ pour des angles $0 \leq \alpha \leq \pi/2$; $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$; $\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2$; $3\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$.

(c) Montrer graphiquement que :

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$$

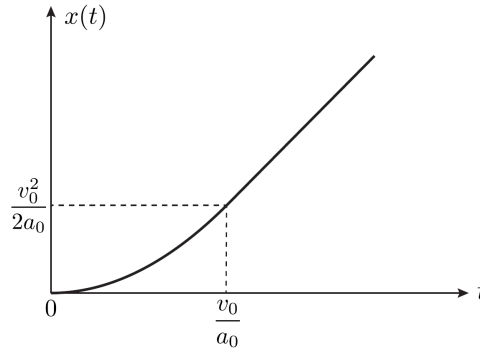
$$\sin(3\pi/2 + \alpha) = -\cos \alpha$$

Exercice 3: Cinématique : graphiques de la vitesse et de l'accélération

Une voiture se déplace en ligne droite. Sa position en fonction du temps est donnée par

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}a_0t^2 & \text{si } t \leq \frac{v_0}{a_0} \\ v_0t - \frac{v_0^2}{2a_0} & \text{si } t > \frac{v_0}{a_0} \end{cases}$$

où v_0 et a_0 sont des constantes positives. La position de la voiture est illustrée sur le graphique ci-dessous :



Esquisser les graphiques de la vitesse $v(t)$ et de l'accélération $a(t)$ en fonction du temps.

Exercice 4: Cinématique : Trajectoire d'une particule

- (a) Une particule décrit une trajectoire plane donnée par $y = Ax^2$, où A est une constante donnée. Une mesure de sa position selon x est donnée par $x(t) = v_{0x}t$, où v_{0x} est également une constante donnée. Avec ces informations, déterminer quelles sont les composantes selon x et y de la vitesse et de l'accélération.
- (b) La trajectoire d'une particule a comme équation paramétrique

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t^2 \\ y = R \sin \omega t^2, \end{cases} \quad (6)$$

où R est constant.

Quelles sont les composantes selon x et y de la vitesse et de l'accélération et quelle trajectoire décrit la particule ?