3 décembre 2024 *J.-P. Hogge*

Corrigé 12bis : Exercice résolu en classe : Référentiels accélérés et Forces d'inertie

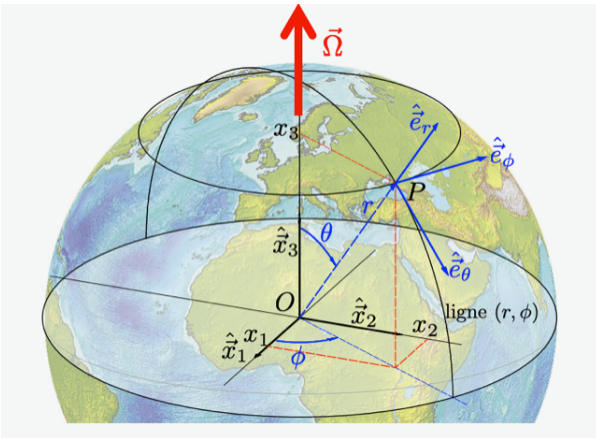
Exercice 1: Voyage et variations de poids

(a) Alors qu'il voyage en train à grande vitesse entre Portland (Oregon) et Montreal (Quebec) où il habite, le jeune F.P. décide de se peser sur une balance de précision. Il constate que le poids indiqué par la balance n'est pas la valeur habituelle. Pourquoi ? Si son poids habituel, mesuré à Montréal est de 75 kg, quelle est la différence mesurée dans le train ? Quelle serait-elle si il faisait le voyage dans l'autre sens ? Et qu'en serait-il si il était dans l'hémisphère sud ?

(b) Après être rentré chez lui et avoir vérifié que son poids habituel n'a pas varié, il prend l'avion et se rend à Singapour. Au repos dans sa chambre d'hôtel, il se pèse encore une fois et constate de nouveau qu'il y a une différence avec le poids indiqué à Montréal. Pourquoi ? Calculer la différence.

Indications : Placez-vous en coordonnées sphériques et évaluez les différentes forces d'inertie

Application numérique :
Masse de F.P. : 70 kg
Latitude de Portand et Montréal : 45 degrés
Latitude de Singapour : 0 degré
Vitesse du train : 300 km/h



(a) On rappelle d'abord l'expression de la position, de la vitesse et de l'accélération en coordonnées sphériques :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= r\hat{\vec{e}}_r \\
\vec{v} &= \dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\vec{e}}_\phi \\
\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\,\hat{\vec{e}}_r \\
&+ \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\,\hat{\vec{e}}_\theta \\
&+ \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right)\,\hat{\vec{e}}_\phi
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Les mouvements que nous allons considérer seront circulaires uniformes, sur un parallèle de la terre. Ces mouvement sont prescrits :

$$
\begin{aligned}
r &= R_T &= \text{cste} \\
\theta &= \theta_0 &= \text{cste} \\
\dot{\phi} &= \omega &= \text{cste}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

où ω prendra des valeurs différentes suivant le référentiel considéré. Le système n'a donc aucun degré de liberté, ce qui se traduit par trois forces de contraintes $\vec{N}_r, \vec{N}_\theta, \vec{N}_\phi$ le long des axes principaux.

Avec les contraintes, l'accélération se réduit à :

$$\vec{a} = \left(-R_T\omega^2 \sin^2\theta_0\right)\, \hat{\vec{e}}_r + \left(-R_T\omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0\right)\, \hat{\vec{e}}_\theta \tag{3}$$

et on constate qu'elle est bien dans un plan horizontal et dirigée vers l'axe de rotation de la Terre.

La variation de poids (minime) constatée par F.P. est due au fait qu'il mesure son poids dans un référentiel non-inertiel, étant donné la rotation de la Terre sur elle-même. Ceci étant, la balance ne sait pas par rapport à quel référentiel les calculs sont effectués, ce qui signifie que nous devons trouver le même résultat quel que soit le référentiel que nous considérons. Pour le montrer, nous allons effectuer les calculs dans 4 référentiels différents :

1. Le référentiel géocentrique, noté $\mathcal{R}$, où les 4 point fixes sont le centre de la terre (O) et trois étoiles lointaines. **Nous allons faire l'hypothèse que ce référentiel est inertiel**.
2. Le référentiel terrestre, noté $\mathcal{R}'$ est décrit par le centre de la terre $(A = O)$, le pôle nord, et les deux points de l'équateur ayant pour longitude 0 et 90 degrés
3. Un référentiel, hybride entre la Terre et le train, $\mathcal{R}''$, défini par le centre de la Terre, le pôle Nord, le point de l'équateur correspondant à la longitude du train et celui correspondant à la longitude du train additionnée de 90 degrés
4. Le référentiel du train, $\mathcal{R}'''$, défini par 4 points fixes du train.

Pour pouvoir appliquer la seconde loi de Newton malgré le caractère non-inertiel du référentiel terrestre, il faut ajouter des forces fictives qui s'écrivent

$$\vec{F}^{\text{inertie}} = -m\,\vec{a}_a(A) - 2m\left(\vec{\Omega}\times\vec{v}_r(P)\right) - m\left(\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{AP}\right)\right) - m\left(\dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{AP}\right) \tag{4}$$

En introduisant la vitesse angulaire de rotation de la terre Ω_T et celle du train mesurée par rapport à la terre Ω_t, on peut identifier les forces qui jouent un rôle en fonction du référentiel considéré. Comme le mouvement est prescrit, toutes les grandeurs qui interviennent dans la détermination des forces d'inertie sont connues. Elles sont listées dans la table ci-dessous pour les quatre référentiels (NA = Not Applicable).

Grandeur	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$	$\mathcal{R}''$	$\mathcal{R}'''$
Rotation du réf. p.r. $\mathcal{R}$: Ω	0	Ω_T	$\Omega_\text{T}+\Omega_\text{t}$	$\Omega_\text{T}+\Omega_\text{t}$
Translation du réf. p.r. $\mathcal{R}$: $\vec{a}_a(A)$	0	0	0	MCU $\Omega_\text{T}+\Omega_\text{t}$
Mvt du train ω	MCU $\Omega_\text{T}+\Omega_\text{t}$	MCU Ω_t	pas de mvt.	pas de mvt.
Vitesse relative $\vec{v}_r(P)$	$R_T\sin\theta_0(\Omega_\text{T}+\Omega_\text{t})\hat{\vec{e}}_\phi$	$R_T\sin\theta_0\Omega_\text{t}\hat{\vec{e}}_\phi$	0	0
Position relative $\overrightarrow{AP}$	$R_T\hat{\vec{e}}_r$	$R_T\hat{\vec{e}}_r$	$R_T\hat{\vec{e}}_r$	0
Coriolis	NA	oui	non	non
Centrifuge	NA	oui	oui	non
Entraînement. $\vec{a}_a(A)$	NA	non	non	oui

On peut ensuite calculer les forces d'inertie dans chacun des référentiels. Pour la force de Coriolis on utilise les formules

$$(\vec{\Omega}\times\vec{v}_r(P)) = (\vec{\Omega}\times v_r\hat{\vec{e}}_\phi) = \begin{vmatrix} \hat{\vec{e}}_r & \hat{\vec{e}}_\theta & \hat{\vec{e}}_\phi \\ \Omega\cos\theta_0 & -\Omega\sin\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & v_r \end{vmatrix} = (-\Omega\,\sin\theta_0\,v_r)\,\hat{\vec{e}}_r + (-\Omega\,\cos\theta_0\,v_r)\,\hat{\vec{e}}_\theta \tag{5}$$

où les grandeurs Ω et v_r prennent les valeurs correspondant respectivement à chaque référentiel, et on a donc

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = (2m\,\Omega\,\sin\theta_0\,v_r)\,\hat{\vec{e}}_r + (2m\,\Omega\,\cos\theta_0)\,v_r\,\hat{\vec{e}}_\theta \tag{6}$$

Le terme de force centrifuge est :

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} = -m\left(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{AP})\right) \tag{7}$$

avec

$$\vec{\Omega} = \Omega\cos\theta_0\,\hat{\vec{e}}_r - \Omega\sin\theta_0\,\hat{\vec{e}}_\theta \tag{8}$$

et

$$\overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AP}|\,\hat{\vec{e}}_r = R_T\,\hat{\vec{e}}_r \quad \text{(ou 0 dans le référentiel } \mathcal{R}''') \tag{9}$$

On a donc :

$$(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} \hat{\vec{e}}_r & \hat{\vec{e}}_\theta & \hat{\vec{e}}_\phi \\ \Omega\cos\theta_0 & -\Omega\sin\theta_0 & 0 \\ |\overrightarrow{AP}| & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\overrightarrow{AP}|\,\Omega\,\sin\theta_0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

et

$$-m\left(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{AP})\right) = -m\begin{vmatrix} \hat{\vec{e}}_r & \hat{\vec{e}}_\theta & \hat{\vec{e}}_\phi \\ \Omega\cos\theta & -\Omega\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & |\overrightarrow{AP}|\,\Omega\,\sin\theta \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} m\,|\overrightarrow{AP}|\,\Omega^2\,\sin^2\theta_0 \\ m\,|\overrightarrow{AP}|\,\Omega^2\,\cos\theta_0\sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

La force d'inertie due à la translation du référentiel relatif est non-nulle dans le seul cas du référentiel du train $\mathcal{R}'''$. Ce dernier a un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\omega = \Omega_T + \Omega_t$ et de rayon $R_T\sin\theta_0$ par rapport au référentiel géocentrique. La force d'inertie correspondante peut donc être déterminée à partir de 3.

Les deux tables ci-dessous résument les différentes forces d'inertie mesurées dans les référentiels d'intérêt.

Référentiel	$-2m\left(\vec{\Omega}\times\vec{v}_r(P)\right)$	$-m\left(\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{AP}\right)\right)$
$\mathcal{R}$	NA	NA
$\mathcal{R}'$	$(2mR_T\sin^2\theta_0\Omega_{\text{T}}\Omega_{\text{t}})\,\hat{\vec{e}}_r$ + $(2mR_T\sin\theta_0\cos\theta_0\Omega_{\text{T}}\Omega_{\text{t}})\,\hat{\vec{e}}_\theta$	$(mR_T\sin^2\theta_0\Omega_{\text{T}}^2)\,\hat{\vec{e}}_r$ + $(mR_T\sin\theta_0\cos\theta_0\Omega_{\text{T}}^2)\,\hat{\vec{e}}_\theta$
$\mathcal{R}''$	0	$(mR_T(\Omega_{\text{T}}+\Omega_{\text{t}})^2\sin^2\theta_0)\,\hat{\vec{e}}_r+$ $(mR_T(\Omega_{\text{T}}+\Omega_{\text{t}})^2\sin\theta_0\cos\theta_0)\,\hat{\vec{e}}_\theta$
$\mathcal{R}'''$	0	0

Référentiel	$-m\,\vec{a}_a(A)$
$\mathcal{R}$	NA
$\mathcal{R}'$	0
$\mathcal{R}''$	0
$\mathcal{R}'''$	$(mR_T(\Omega_\mathrm{T}+\Omega_\mathrm{t})^2\sin^2\theta_0)\,\hat{\vec{e}}_r+$ $(mR_T(\Omega_\mathrm{T}+\Omega_\mathrm{t})^2\sin\theta_0\cos\theta_0)\,\hat{\vec{e}}_\theta$

Il reste finalement à écrire les équations de Newton dans les 4 référentiels respectifs, en se concentrant sur la composante en $\hat{\vec{e}}_r$ pour déterminer la contrainte N_r qui nous intéresse plus particulièrement. Les forces physiques sont le poids du train $m\vec{g}$ et les trois contraintes N_r, N_θ et N_ϕ. De plus, le mouvement dans chaque référentiel est circulaire uniforme ou nul.

<u>Dans le référentiel d'inertie $\mathcal{R}$</u> : ($\omega=\Omega_T+\Omega_t$, $\Omega=0$, $\overrightarrow{AP}=R_T\hat{\vec{e}}_r$)

$$\begin{array}{rrcl} \text{Selon } \hat{\vec{e}}_r : & -mR_T(\Omega_T+\Omega_t)^2\sin^2\theta_0 & = & -mg+N_r \\ \text{Selon } \hat{\vec{e}}_\theta : & -mR_T(\Omega_T+\Omega_t)^2\sin\theta_0\cos\theta_0 & = & N_\theta \\ \text{Selon } \hat{\vec{e}}_\phi : & 0 & = & N_\phi \end{array} \tag{12}$$

d'où on tire immédiatement :

$$N_r = mg - mR_T(\Omega_T+\Omega_t)^2\sin^2\theta_0 \tag{13}$$

<u>Dans le référentiel de la Terre $\mathcal{R}'$</u> : ($\omega=\Omega_t$, $\Omega=\Omega_t$, $\overrightarrow{AP}=R_T\hat{\vec{e}}_r$)

$$\begin{array}{rrcl} \text{Selon } \hat{\vec{e}}_r : & -mR_T\Omega_t^2\sin^2\theta_0 & = & -mg+N_r+\underbrace{2mR_T\sin^2\theta_0\Omega_\mathrm{T}\Omega_\mathrm{t}}_{\text{Coriolis}}+\underbrace{mR_T\sin^2\theta_0\Omega_\mathrm{T}^2}_{\text{centrifuge}} \\ \text{Selon } \hat{\vec{e}}_\theta : & -mR_T\Omega_t^2\sin\theta_0\cos\theta_0 & = & N_\theta+\underbrace{2mR_T\sin\theta_0\cos\theta_0\Omega_\mathrm{T}\Omega_\mathrm{t}}_{\text{Coriolis}}+\underbrace{mR_T\sin\theta_0\cos\theta_0\Omega_\mathrm{T}^2}_{\text{centrifuge}} \end{array} \tag{14}$$

d'où on tire également :

$$N_r = mg - mR_T(\Omega_T+\Omega_t)^2\sin^2\theta_0 \tag{15}$$

<u>Dans le référentiel hybride Terre-train $\mathcal{R}''$</u> : ($\omega=0$, $\Omega=\Omega_T+\Omega_t$, $\overrightarrow{AP}=R_T\hat{\vec{e}}_r$)

$$\begin{array}{rrcl} \text{Selon } \hat{\vec{e}}_r : & 0 & = & -mg+N_r+\underbrace{mR_T(\Omega_\mathrm{T}+\Omega_\mathrm{t})^2\sin^2\theta_0}_{\text{Force centrifuge}} \\ \text{Selon } \hat{\vec{e}}_\theta : & 0 & = & N_\theta+\underbrace{mR_T(\Omega_\mathrm{T}+\Omega_\mathrm{t})^2\sin\theta_0\cos\theta_0}_{\text{Force centrifuge}} \end{array} \tag{16}$$

d'où l'on tire encore

$$N_r = mg - mR_T(\Omega_T+\Omega_t)^2\sin^2\theta_0 \tag{17}$$

Dans le référentiel du train $\mathcal{R}'''$: ($\omega = 0$, $\Omega = \Omega_T + \Omega_t$, $\overrightarrow{AP} = 0$)

$$\begin{aligned} \text{Selon } \hat{\vec{e}}_r: \quad 0 &= -mg + N_r + \underbrace{mR_T(\Omega_\text{T} + \Omega_\text{t})^2 \sin^2\theta_0}_{\text{Force d'entraînement}} \\ \text{Selon } \hat{\vec{e}}_\theta: \quad 0 &= N_\theta + \underbrace{mR_T(\Omega_\text{T} + \Omega_\text{t})^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}_{\text{Force d'entraînement}} \end{aligned} \tag{18}$$

d'où l'on tire encore et toujours

$$N_r = mg - mR_T(\Omega_T + \Omega_t)^2 \sin^2\theta_0 \tag{19}$$

On a donc montré que le résultat est indépendant du choix du référentiel. Il faut préciser que ce résultat est valable dans la limite non-relativiste, c'est-à-dire pour des vitesses qui sont très petites devant la vitesse de la lumière.

On constate également que la fonction 13 est paire par rapport $\theta_0 = \pi/2$, ce qui signifie que la tendance serait identique dans l'hémisphère Sud.

(b) Si F.P. se pèse chez lui ou dans sa chambre d'hôtel au niveau de l'équateur, sa vitesse relative, et donc la force de Coriolis qu'il ressent, est nulle. C'est donc la variation de la force centrifuge qui sera responsable de sa variation de poids apparent.

L'effet de la force centrifuge est donc de modifier non-seulement le poids apparent à travers la composante en $\hat{\vec{e}}_r$, mais également la direction de la gravité apparente à travers la composante en $\hat{\vec{e}}_\theta$. Dans l'application numérique ci-dessous, on fait l'hypothèse que le poids indiqué par la balance est uniquement sensible à la composante en $\hat{\vec{e}}_r$.

Application numérique :
$m = 75$[kg], $R_T = 6.4 \cdot 10^6$[m], $\Omega_T = 2\pi/86400 = 7.2722 \cdot 10^{-5}$[rad/s], $\theta_0 = \pi/4$, $\Omega_\text{t} = v_\text{train}/(R_T \sin\theta_0) = 1.8414 \cdot 10^{-5}$[rad/s].
Dans l'application numérique on indique N_r/g pour $m = 75$[kg].

1. Poids indiqué par la balance au pôle Nord : 75.000 [kg]
2. Poids à Montréal : 74.871 [kg]
3. Poids dans le train Portland-Montréal : 74.797 [kg] (différence par rapport à Montréal : -74 grammes)
4. Poids dans le train Montréal-Portland : 74.928 [kg] (différence par rapport à Montréal : +57 grammes)
5. Poids à Singapour : 74.741 [kg] (différence par rapport à Montréal : -130 grammes)