Exo1: on considère l'équation différentielle suivante:

$$\dot{u}(t) = -u^3(t) + e^{-t^2/2}, \qquad t > 0,$$
$$u(0) = 1,$$

1- Ecrire le schema de Euler explicite et calculer dans Excel u(t=10) avec 4 chiffres derrière la virgule pour $\Delta t = 1.$ et $\Delta t = 0.1$

2- évaluer dans excel le pas de temps maximum qui donne une solution convergente

3- écrire le schéma de Euler implicite sans le résoudre

4- écrire le schéma mixte (méthode des trapezès) sans le résoudre

Exo1: corrigé

$$\dot{u}(t) = -u^3(t) + e^{-t^2/2}, \qquad t > 0,$$
$$u(0) = 1,$$

1- Euler explicite s'écrit

$\Delta t > 0$, $u_0 = u(0) = 1$ et $t = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, 3$ ...

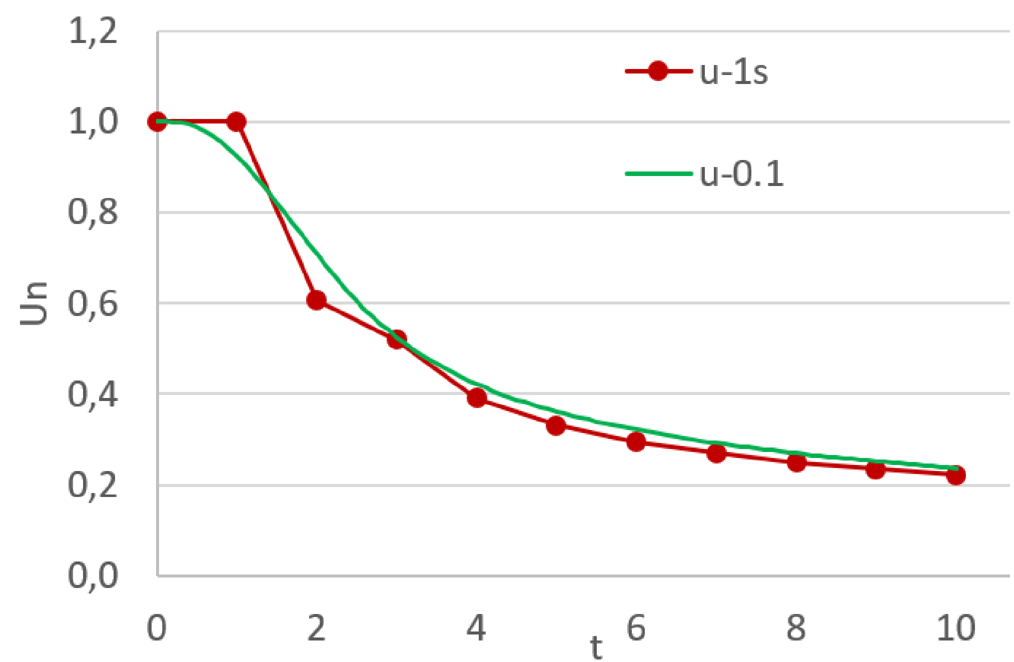
$$\dot{u}(t) = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = -u_n^3 + e^{-(n\Delta t)^2/2}$$

qui donne $u_{n+1} = u_n + \Delta t\left(-u_n^3 + e^{-(n\Delta t)^2/2}\right)$

$$u_1 = u_0 + \Delta t\left(-u_0^3 + e^{-0^2/2}\right) = u_0 = 1,$$

$$u_2 = u_1 + \Delta t\left(-u_1^3 + e^{-(\Delta t)^2/2}\right),$$

etc ....



NB: $\dot{u}(t=0) = 0$. est assuré numériquement $\forall \Delta t$

Introduction à la méthode des EF

Exo1: corrigé

$$\dot{u}(t) = -u^3(t) + e^{-t^2/2}, \qquad t > 0,$$
$$u(0) = 1,$$

1- Calculer u(t=10) avec 4 chiffres derrière la virgule
et Δt = 1. et 0.1

u10 = 0,22130 avec Δt = 1
u10 = 0,23706 avec Δt = 0.1 (plus précis …)

NB: aux temps élevés, la solution u(t) tend vers
la solution u_1 de l'équation sans l'exponentielle :

$$\dot{u}_1(t) = -\dot{u}_1^3(t) \text{ avec } u_1(0) = 1. \quad \left(\dot{u}_1(0) = -1\ !\right)$$

$$\text{solution: } u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} \qquad \left(u_1(10) = \frac{1}{\sqrt{21}} = 0{,}218217890\right)$$

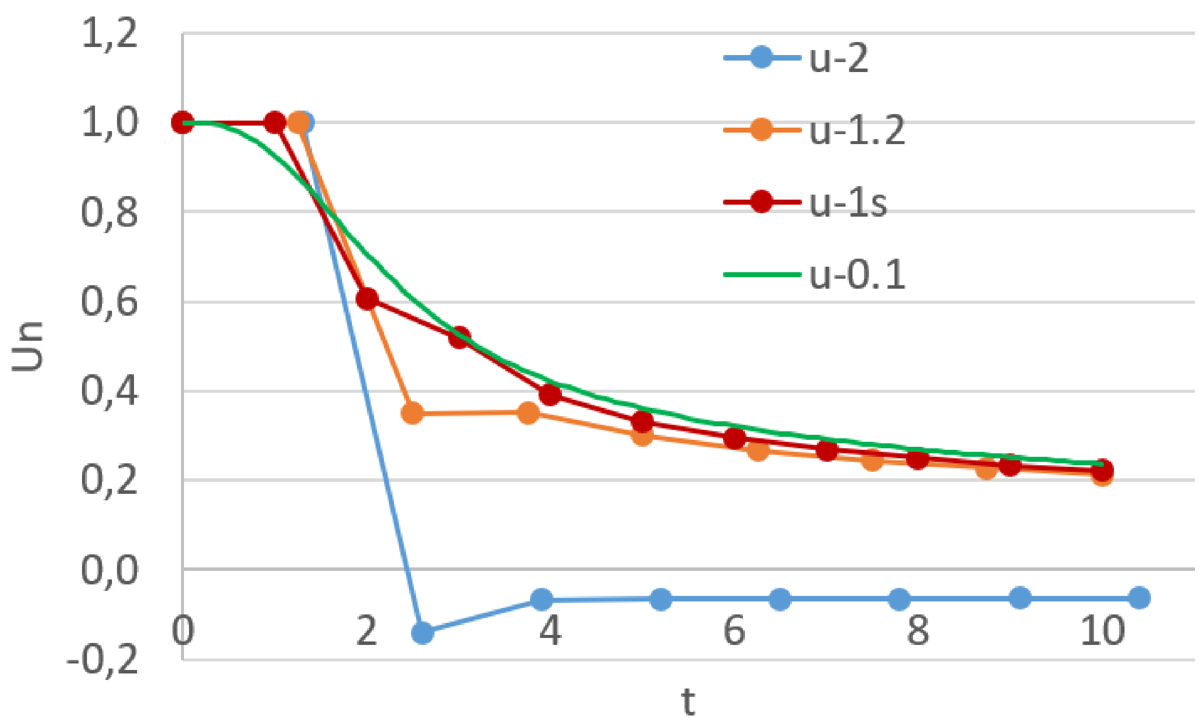
Introduction à la méthode des EF

Exo1: corrigé

$$\dot{u}(t) = -u^3(t) + e^{-t^2/2}, \qquad t > 0,$$
$$u(0) = 1,$$

2- évaluer dans excel le pas de temps maximum qui donne une solution convergente

La suite u_n n'est plus décroissante vers $\Delta t = 1.2$ s



exo1: corrigé

$$\dot{u}(t) = -u^3(t) + e^{-t^2/2}, \qquad t > 0,$$
$$u(0) = 1,$$

3- Euler implicite s'écrit

$u_0 = u(0) = 1$ et $t = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

$$\dot{u}(t) = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = -u_{n+1}^3 + e^{-((n+1)\Delta t)^2/2} \text{ qui donne } u_{n+1} = u_n + \Delta t\left(-u_{n+1}^3 + e^{-((n+1)\Delta t)^2/2}\right)$$

u_{n+1} est solution de $u_{n+1} + \Delta t u_{n+1}^3 = u_n + \Delta t e^{-((n+1)\Delta t)^2/2}$

méthode de Newton ..... (zéro d'un polynôme de degré 3).

4- méthode des trapèzes

$\Delta t > 0$, $u_0 = u(0) = 1$ et $t = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}(t_n) + \dot{u}(t_{n+1})\right) = \frac{1}{2}\left(-u_n^3 + e^{-(n\Delta t)^2/2} - u_{n+1}^3 + e^{-((n+1)\Delta t)^2/2}\right) \text{ qui donne}$$

$$u_{n+1}, \text{ solution de } u_{n+1} + \frac{1}{2}\Delta t u_{n+1}^3 = u_n + \frac{\Delta t}{2}\left(-u_n^3 + e^{-(n\Delta t)^2/2} + e^{-((n+1)\Delta t)^2/2}\right)$$

méthode de Newton ..... (zéro d'un polynôme de degré 3).