

Examen Bachelor « Transformation de phases » 19 juin 2019

SOLUTIONS

Cours : voir slides

Exercice 1 :

- a) Sur le graphique on peut lire certaines valeurs utiles pour calculer la pente. Celle-ci est de $-\frac{1}{0.01} = -100 \text{ atm/K}$. La valeur est négative car la chaleur latente de fusion de la glace est positive (normal) et le changement de volume négatif car l'eau liquide est plus dense que la glace (anormal).
- b) Pour calculer la valeur plus précise de la pente on utilise l'équation de Clausius-Clapeyron, $\frac{dT}{dp} = \frac{T_f \Delta V}{L_m}$, cette équation est pour un changement de volume molaire et une chaleur latente molaire, mais elle est aussi valable si ces deux paramètres sont massiques (diviser le numérateur et dénominateur par la masse molaire). Donc :

$$\frac{dT}{dp} = -273 \frac{0.0885 \cdot 10^{-3}}{333.5 \cdot 10^3} \text{ K m}^3/\text{J} = -273 \frac{0.0885 \cdot 10^{-3}}{333.5 \cdot 10^3} \text{ K. Pa}$$

Et si on prend l'inverse $\frac{dp}{dT} = -13.8 \text{ MPa/K}$, soit encore -136.23 atm/K .

- c) Sous l'effet de la pression du fil la température de fusion baisse et la glace fond localement, en conséquence le fil descend dans le bloc de glace. L'eau redevient solide après le passage du fil, lorsque la pression redevient normale.
- d) Pour abaisser la température d'équilibre de 1°C (l'eau devient liquide pour $T > -1^\circ\text{C}$), il faut une pression d'environ $p = 15 \text{ MPa} = \frac{m \times 10}{10^{-3} \cdot 0.1}$ soit un charge m d'environ 150 kg. Sur le fil, la contrainte devient $\sigma = \frac{m \times 10}{3.14 \cdot 10^{-6} / 4} = 1900 \text{ MPa}$. Seul un fil en acier à haut performance peut tenir une telle contrainte!
- Pour un fil en cuivre de $\sigma = \frac{m \cdot g}{\pi R^2} = 200 \text{ MPa}$, alors qu'il faut toujours $p = \frac{m \cdot g}{2RL} = 15 \text{ MPa}$,
Donc $R = \frac{2 p L}{\pi \sigma} = 4.3 \text{ mm}$.

Exercice 2 :

- a) Pour chacun des deux corps purs A = Au et B = Ni la variation d'énergie libre de Gibbs est donnée entre T et T_f par $\Delta G_m^A = \frac{T_f - T}{T_f} \Delta H_m^A$. Cette formule est normalement valable que pour de faibles écarts de températures par rapport à la température de fusion du corps pur ($T_f - T$), mais elle reste valable ici car nous avons émis l'hypothèse que le liquide et le solide avaient les mêmes capacités thermiques. Donc

- Pour le nickel $\Delta G_m^{Ni} = \frac{1723-1223}{1223} 17 \cdot 10^6 = 6.9 \cdot 10^6 \text{ J/kmol}$
- Pour l'or $\Delta G_m^{Au} = \frac{1336-1223}{1223} 12 \cdot 10^6 = 1.1 \cdot 10^6 \text{ J/kmol}$

Comme les termes entropiques (en $x \ln x$) dans l'énergie libre de Gibbs du solide et du liquide sont identiques, l'enthalpie molaire de mélange calculée à partir du liquide est directement

$$\Delta H_m = \frac{1}{2} \Delta G_m^{Ni} + \frac{1}{2} \Delta G_m^{Au} = 4 \cdot 10^6 \text{ J/kmol} = 4 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$$

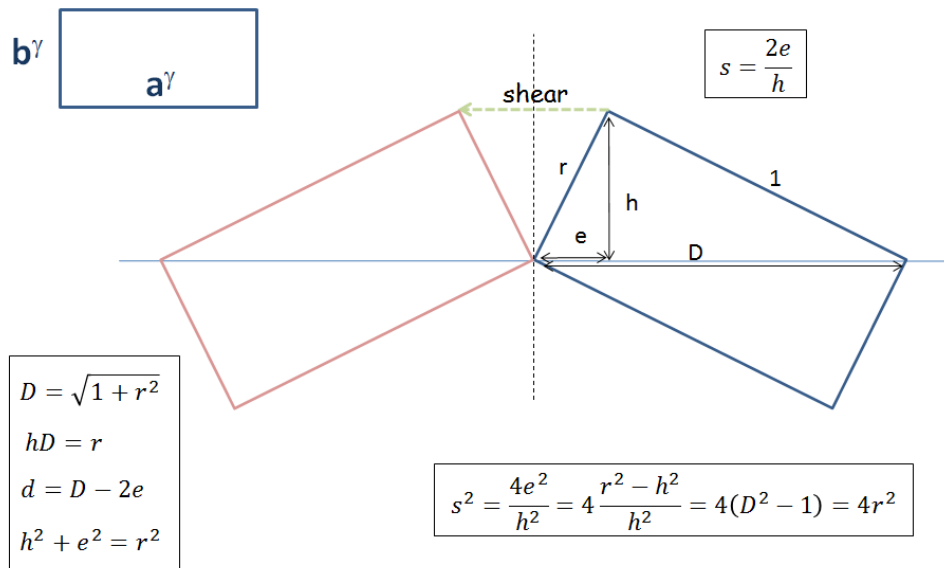
- b) Pour cette partie de calcul la "bosse" de démixtion est considérée.

$$\Omega = 2RT = 2 \cdot 8.3 \cdot 10^3 (750+273) = 17 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$$

$$\Delta H_m = x_A x_B \Omega = \frac{\Omega}{4} = 4.2 \cdot 10^3 \text{ J/mol} \text{ en bon accord avec le calcul fait en a)}$$

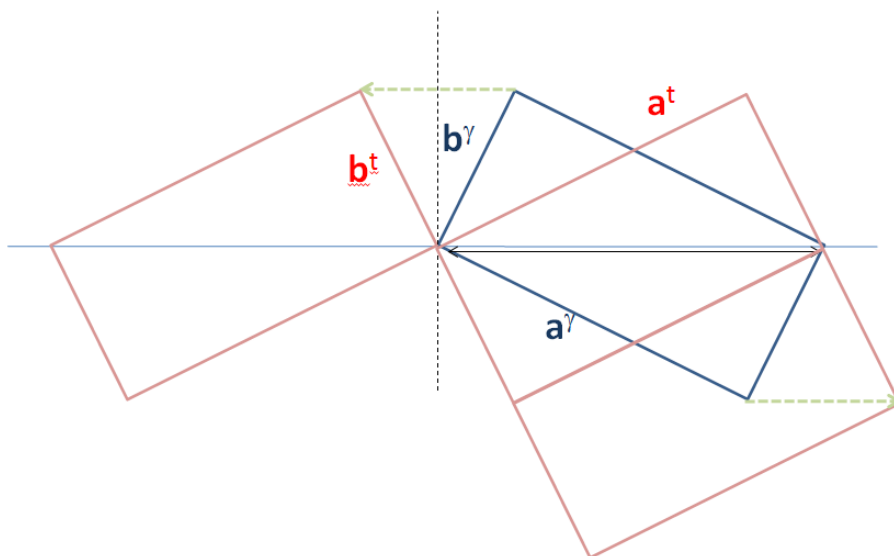
Exercice 3 :

a) La solution géométrique est la suivante :



Soit $s = 2r$

b) Le plus difficile est de trouver la matrice de correspondance.



Ensuite c'est de l'application directe du cours.

Metric tensor of the phase in the direct and reciprocal space

$$\mathbf{b}^\gamma = r \quad \boxed{\mathbf{a}^\gamma = 1}$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{B}^* \rightarrow \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^{-1} = [\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{bmatrix}$$

Shear value s by Bevis&Crocker's formula

$$s^2 = \text{Tr}(\mathbf{C}^t \mathbf{G} \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1}) - 2 \quad \text{with} \quad \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{a}^\gamma \rightarrow \mathbf{a}^{twin} \\ \mathbf{b}^\gamma \rightarrow \mathbf{a}^{twin} - 2\mathbf{b}^{twin} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{C}^{twin \rightarrow \gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow s^2 = \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{bmatrix}\right) - 2 = 4r^2$$

c)

Normalized shear direction \mathbf{d} and shear plane \mathbf{p}

$$\text{Before normalization } \mathbf{d} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \|\mathbf{d}\|^2 = \mathbf{d}^t \mathbf{G} \mathbf{d} = 1 + r^2$$

$$\Rightarrow \text{After normalization } \tilde{\mathbf{d}} = \frac{-1}{\sqrt{1+r^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Before normalization } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \|\mathbf{p}\|^2 = \mathbf{p}^t \mathbf{G}^{-1} \mathbf{p} = \frac{1+r^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \text{After normalization } \tilde{\mathbf{p}} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{I} + s \tilde{\mathbf{d}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}^t = \frac{1}{1+r^2} \begin{bmatrix} 1+3r^2 & -2r^2 \\ 2r^2 & 1-r^2 \end{bmatrix}$$

Note: $\mathbf{d} \cdot \mathbf{p}^t = \text{Outer}(\mathbf{d}, \mathbf{p})$
on Mathematica

It can be checked that $\text{Det}(\mathbf{S}) = 1$, $\text{Tr}(\mathbf{S}) = 2$, and $\mathbf{S} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- d) Image de u est $u' = C \cdot u = \{1, 0\}$ dans le repère final.
Image de g est $g' = C^* \cdot g = \{5, 2\}$ dans le repère final.