

Exercise Series 6

Solutions

1. Dendrite dans un alliage Al-Zn

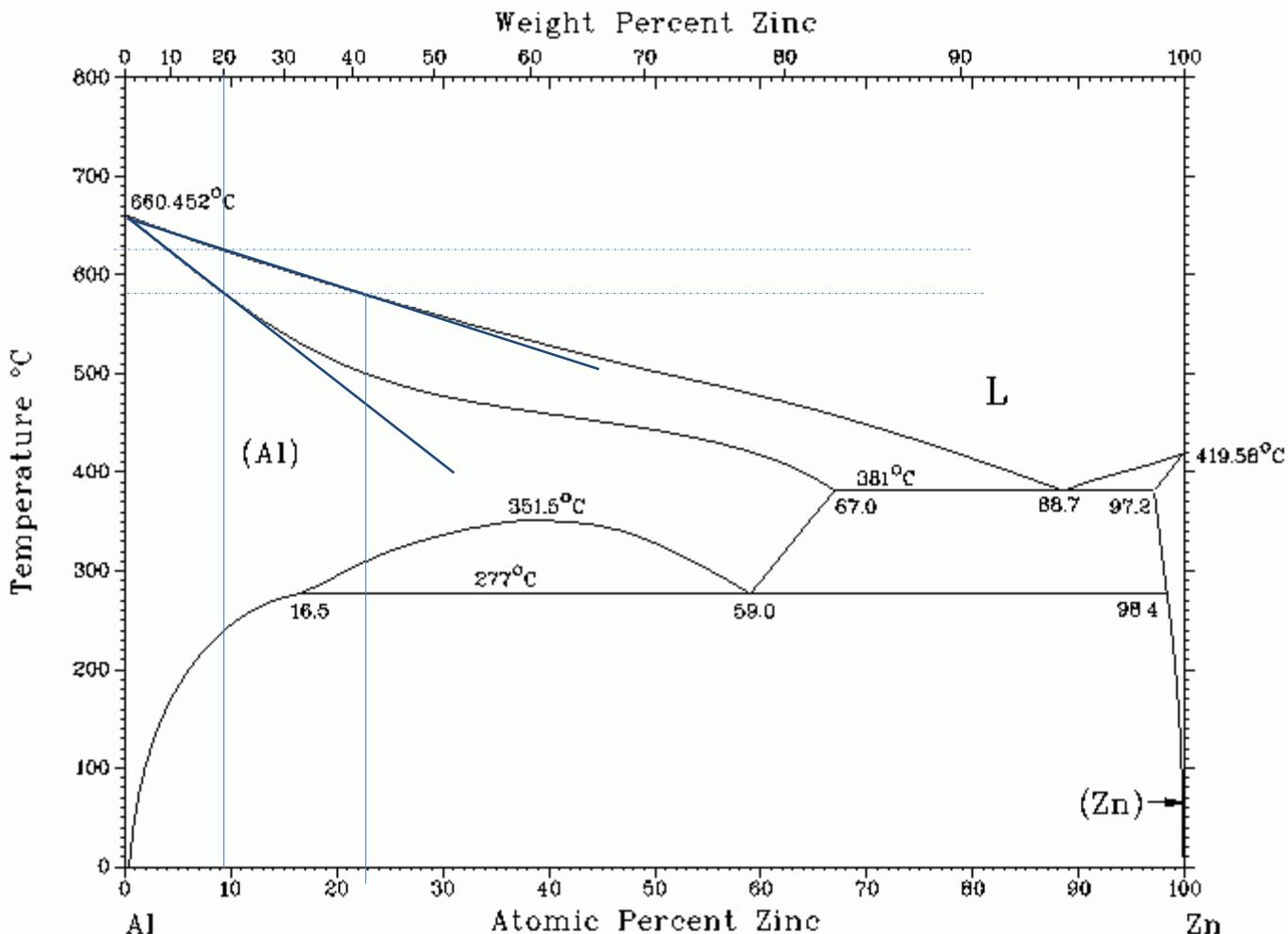
Cet exercice a pour objectif de manipuler les paramètres importants et leurs ordres de grandeurs.

On mesure 7 troncs sur la largeur de 2500 μm ; l'espacement moyen est donc de

$$2500/6 = 415 \mu\text{m}.$$

Nous utilisons la relation $\Delta T^* = 2\pi \sqrt{\frac{\Gamma_{sl} \Delta T_0 k}{D_l}} \sqrt{v}$ avec les données de l'énoncé.

Pour une composition de 20%-wt en Zn on mesure sur le diagramme de phase $\Delta T_0 \approx 45 \text{ K}$
 Pour le coefficient de partage rappelons que $k = c_s/c_l$ est le rapport des concentrations, et donc de manière équivalente des fractions molaires en suivant l'hypothèse rappelée dans l'énoncé et utilisée dans le cours à savoir que les volumes molaires du soluté et du solvant sont égaux, et ce dans le solide et dans le liquide. Il faut donc mesurer k en considérant l'échelle « *atomic percent* » et non « *weight percent* ». Ici $k = \frac{9.5}{23} = 0.413$.



On calcule que $\Gamma_{sl} \approx \frac{(625+273) 0.1 J/m^2}{111 J/g 7.11 g/cm^3}$ (on prend la température du liquidus à 20wt-% pour température de fusion car $\Delta T^* \ll \Delta T_0$)

Il vient alors directement

$$\Delta T^* = 2\pi \sqrt{\frac{v \Gamma_{sl} \Delta T_0 k}{D_l}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{10^{-3} m/s \frac{(625+273)K 0.1 J/m^2}{111 J/g 7.11 g/cm^3} 45K 0.413}{3 \cdot 10^{-9} m^2/s}} \approx 5.27 K$$

Et

$$r = \frac{4\pi^2 \Gamma_{sl}}{\Delta T^*} \approx 4\pi^2 \frac{(625+273)K 0.1 J/m^2}{111 J/g 7.11 \frac{g}{cm^3}} \frac{1}{5.27 K} \approx 0.8 \mu m$$

Pour l'espace entre dendrite on trouve

$\lambda_1 \approx 2 \sqrt{\frac{\Delta T_0}{G_{th}}} \sqrt{r} \approx 143 \mu m$, assez loin de la valeur mesurée sur la métallographie (écart dû probablement aux nombreuses simplifications faites pour pouvoir utiliser les équations du cours).

Il faut bien prendre conscience qu'il y a eu beaucoup d'hypothèses et beaucoup d'approximations. On peut reprendre les hypothèses de travail et nous voyons qu'en fait ΔT^* n'est pas vraiment négligeable par rapport à ΔT_0 .

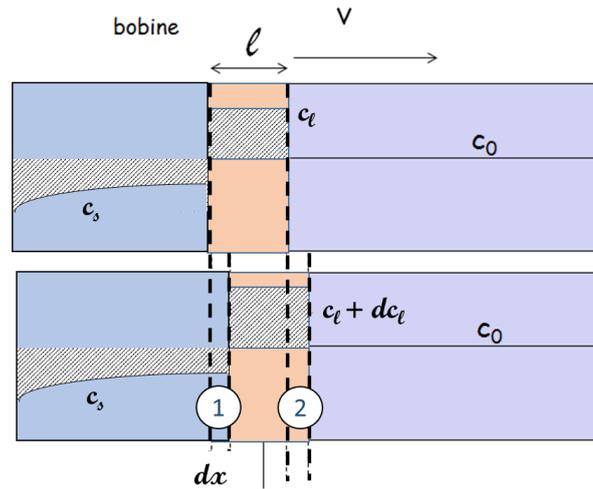
Par contre, $m_l G_c = \frac{\Delta T_0 v}{D_l} \approx \frac{45K \frac{10^{-3} m}{s}}{3 \cdot 10^{-9} m^2/s} \approx 15 \cdot 10^6 \frac{K}{m} = 15 \cdot 10^4 \frac{K}{cm}$ et donc nous avons bien $m_l G_c \gg G_{th}$

2 Refusion zonale

a) Quatre hypothèses sont formulées dans l'énoncé:

1. Les interfaces sont planes: on est donc en situation de croissance en front plan
2. $D_s = 0$: la concentration reste donc égale à c_0 dans le solide entrant, et le profil de concentration est « gelé » dans le solide sortant.
3. La concentration est uniforme dans la phase liquide
4. $k < 1$, les lignes du solidus et du liquidus sont plongeantes.

Imaginons que c'est plutôt la bobine qui se déplace à une vitesse v vers la droite. Le liquide qui se forme au début a une composition c_0 . Quand la bobine avance un peu plus, le premier solide se forme à gauche de la zone liquide avec une composition de $c_{s,0} = kc_{l,0} = kc_0$. Puisque le solide qui se forme ainsi est moins riche en soluté que le solide de la barre, le liquide va progressivement s'enrichir en soluté (voir les zones grisées du schéma de la page suivante). Nous allons traiter le cas dans lequel la bobine reste toujours avec à droite et à gauche du solide (elle ne commence par à ressortir de la barre). Cette dernière phase correspond à un enrichissement du liquide au-delà de c_0/k et la fin de la barre est très enrichie en soluté. Cette fin de barre est supposée se produire sur une courte distance. Cet enrichissement final n'est pas pris en compte dans les équations qui suivent et ne sera pas montré dans les graphs. Attention, ici nous ne sommes jamais en régime permanent, et $c_s = c_0$ n'est supposé être qu'en fin de passage de la boucle.



$$\begin{cases} l \, dc_l = dx (c_l - c_s) + dx (c_0 - c_l) \\ dc_s = k \, dc_l \end{cases}$$

- ① La partie à gauche liquide à c_l devient solide à $c_s = k c_l$ (\rightarrow enrichissement du liquide "restant")
- ② La partie à droite solide qui était à c_0 passe en liquide à c_l (\rightarrow appauvrissement du liquide)

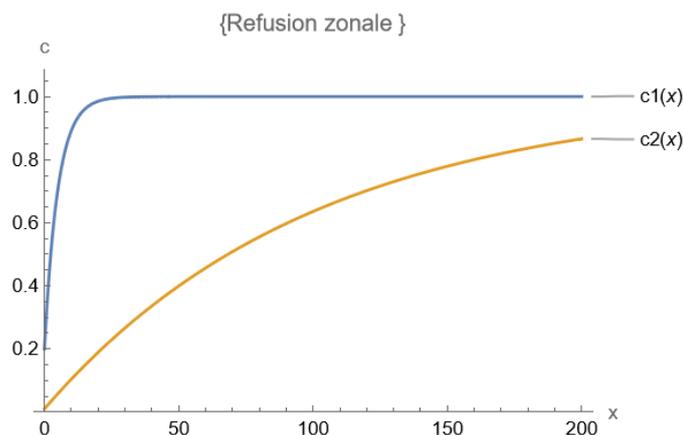
Le bilan de soluté au niveau de la zone liquide est (voir figure ci-dessus) :

$$\frac{l}{k} \frac{dc_s}{dx} = c_0 - c_s$$

Les conditions aux limites sont $c_s(x=0) = k c_0$ et $c_s(x=\infty) = c_0$. Note : cette dernière condition peut être discutée car elle sous-entend que la composition moyenne de la barre est plus basse que c_0 ce qui est dans les faits impossible. Elle traduit le fait que nous avons ignoré la fin de solidification quand la boucle commence à ressortir et crée sur une courte distance un solide très enrichi.

La solution est donc $c_s(x) = c_0 + c_0(k - 1)\exp(-\frac{k}{l}x)$

b) De cette équation on peut déduire que c_s reste pour une grande partie de la zone re-solidifiée largement en dessous de c_0 , et ce d'autant plus que la valeur de k est proche de zéro. Plus le coefficient de partition est faible (on devrait dire diffère de l'unité), plus grande sera la pureté du solide, i.e. plus efficace est le procédé. Voici le profil de concentration dans deux cas en bleu $k = 0.2$, en orange $k = 0.01$:



Refusion zonale. $L = 200$, $l = 1$ (pour avoir $l/L = 0.05$), $c_0=1$, avec en bleu $k = 0.2$, en orange $k = 0.01$

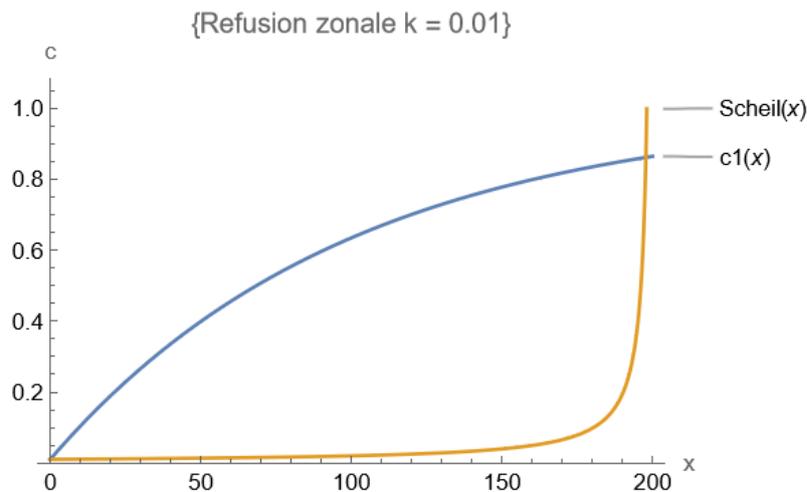
Dans la limite $k \approx 0$, toute impureté est enlevée en un seul passage.

c) Pour cette partie il faut activer un programme de calcul numérique quelconque pour pouvoir comparer les deux résultats graphiquement.

Comparons l'équation de la refusion zonale par rapport à celle d'un four Bridgman (et, vues les hypothèses, le modèle de Scheil-Gulliver)

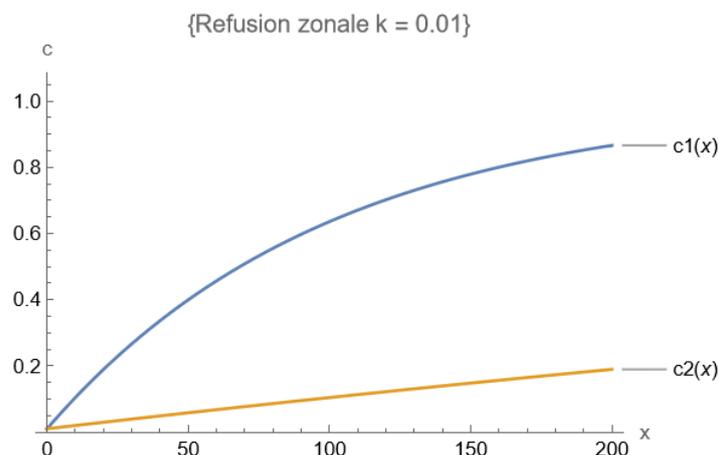
$$c_l^* = c_0 (1 - f^{S^*})^{k-1} \rightarrow c_s^* = c_s(x) = kc_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{k-1}$$

Le résultat est donné en figure ci-dessous.



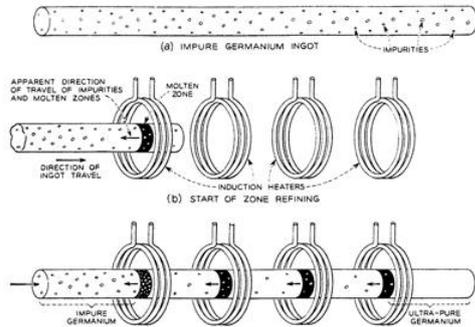
Comparaison de l'évolution de la composition le long du barreau entre Scheil-Gulliver et refusion zonale. La solution de Scheil Gulliver reste toujours (sauf pour la toute dernière partie) en dessous du résultat par refusion zonale. $L = 200, l = 1, c_0=1, k = 0.01$

La solidification selon Scheil-Gulliver mène à une évolution de la composition qui reste sur la majeure partie en-dessous de celle obtenue par la refusion zonale et serait donc plus efficace que la refusion zonale. La raison est que dans l'excès de soluté est plus facilement rediffusé dans le liquide et que le liquide a un volume beaucoup plus important dans une solidification en four Bridgman. Qualitativement, on retrouve cet effet en augmentant la longueur l dans l'équation de la refusion :



Refusion zonale. $L = 200, c_0=1, k = 0.01$, avec en bleu $l = 1$ et en orange $l = 20$.

L'intérêt de quand même utiliser la refusion zonale réside dans la possibilité de faire plusieurs étapes de refusion zonale de suite ou même en série (cf. fig. ci-dessous). Evidemment, le calcul devient plus difficile mais numériquement cela ne pose pas de problème.



Refusion zonale multiple en série pour purifié des monocristaux de germanium (source: http://america.pink/zone-melting_4914319.html)